COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nello piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (2,1)$, $B := (3,5)$ e $C := (1,k)$ con k che varia nell'insieme dei numeri reali.

2 (a) Determina i valori di k per cui i punti A, B e C sono allineati:

$k = -3$

Motivazione:

Utilizziamo la formula che dà l'allineamento dei tre punti A, B e C:

$$\begin{vmatrix} 3-2 & 5-1 \\ 1-2 & k-1 \end{vmatrix} = 0$$

che dà $k+3=0$ la cui soluzione è $k=-3$.

2 (b) Determina i valori di k per cui il triangolo ABC ha area uguale a 5:

$k = 7$ o $k = -13$

Motivazione:

Il lato AB ha lunghezza $\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{17}$. La retta passante per A e B ha equazione cartesiana

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 3-2 & 5-1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè $4x-y-7=0$. L'altezza del triangolo relativa al lato AB è uguale alla distanza di C da questa retta cioè $\frac{|4\cdot 1-k-7|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{|-k-3|}{\sqrt{17}}$. L'area del triangolo ABC è allora $\frac{\sqrt{17}\cdot\frac{|-k-3|}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{|-k-3|}{2}$. Imponendo che l'area sia uguale a 5 troviamo la condizione $|-k-3| = 10$ le cui soluzioni sono $k=7$ e $k=-13$.

2. Siano date le matrici $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

2

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore di B?

$k = 10$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di B se e solo se $B\mathbf{v}$ è un multiplo di $\mathbf{v}$. Facendo il prodotto $B\mathbf{v}$ otteniamo

$$B\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k-2 \end{pmatrix}.$$

Allora $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore di B se e solo se esiste λ tale che $\begin{pmatrix} -4 \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ cioè $-4 = \lambda \cdot 1$ e $k - 2 = \lambda(-2)$, il che avviene se e solo se $\lambda = -4$ e $k = 10$.

2

(b) Per quali valori di k esiste un vettore che è autovettore sia della matrice A che della matrice B?

$k = 0$

Motivazione:

La matrice A è una matrice diagonale con autovalori diversi. I suoi autovettori sono allora $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e i suoi multipli non nulli e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e i suoi multipli non nulli. Un multiplo non nullo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di B se e solo se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ stesso è autovettore di B. Similmente un multiplo non nullo di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di B se e solo se $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ stesso è autovettore di B.

Poiché $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$, si ha che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di B se e solo se $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ è multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ il che avviene se e solo se $k = 0$.

Poiché $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è autovettore di B qualunque sia k perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In conclusione esiste un vettore che è autovettore sia di A che di B se e solo se $k = 0$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{u} := (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{v} := (2, 1, 3, 1)$ e $\mathbf{w} := (3, 2, 2, 1)$ e sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito $F := \{(x, y, z, w) \mid 2x + y - z - w = 0\}$.

| 2 | |

(a) Determina una base per $E \cap F$.

$(-7, -3, -13, -4)$

Motivazione:

Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto alla base canonica. Il minore formato dalle prime due righe e due colonne ha determinante non nullo e i suoi orlati hanno determinante nullo, dunque la matrice ha rango 2 e i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formano una base per E.
Un vettore $\mathbf{z}$ appartiene allora a E se e solo se si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cioè se si ha per qualche valore di α e β:

$$\mathbf{z} = \alpha(1, 1, -1, 0) + \beta(2, 1, 3, 1) = (\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, -\alpha + 3\beta, \beta).$$

Imponendo che $\mathbf{z}$ appartenga a F troviamo la condizione

$$2(\alpha + 2\beta) + (\alpha + \beta) - (-\alpha + 3\beta) - \beta = 0$$

cioè $4\alpha + \beta = 0$, da cui otteniamo $\beta = -4\alpha$. I vettori di $E \cap F$ sono allora i vettori del tipo $(\alpha + 2(-4\alpha), \alpha + (-4\alpha), -\alpha + 3(-4\alpha), -4\alpha) = (-7\alpha, -3\alpha, -13\alpha, -4\alpha)$. Scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1$ si trova un vettore che forma una base di $E \cap F$.

| 2 | |

(b) Determina una base per $E + F$.

$(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $\dim E = 2$ e $\dim(E \cap F) = 1$. Il sottospazio F, insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea non banale, ha dimensione uguale a $4 - 1 = 3$.
Per la formula di Grassmann, si ha $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 3 - 1 = 4$. Ma allora $E + F$ coincide con $\mathbb{R}^4$ e possiamo prendere come base per $E + F$ una qualsiasi base per $\mathbb{R}^4$, ad esempio la base canonica.

| 3 | |

(c) Detto G il sottospazio $E \cap F$ determina una base per un sottospazio H tale che $E = G \oplus H$.

$(1, 1, -1, 0)$

Motivazione:

Sappiamo che E ha dimensione 2 e G ha dimensione 1: il sottospazio H deve allora avere dimensione $2 - 1 = 1$. Un qualunque vettore che appartiene ad E ma non a G genera allora un sottospazio H come quello cercato: prendiamo ad esempio $\mathbf{u}$ (si verifica facilmente che non soddisfa la condizione che definisce F e quindi non appartiene a $G = E \cap F$).

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Determina gli autovalori di A.

0 2 4

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = x^4 - 6x^3 + 8x^2$, che si annulla per 0, 2 e 4.

| 3 | |

(b) Determina una base per ciascun autospazio di A. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(-1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$
2	$(1,1,0,0)$
4	$(0,0,-1,1)$

Motivazione:

Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2z - 2w = 0 \\ -2z + 2w = 0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $(-h, h, k, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.

Per calcolare $E(2)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, cioè $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -2w = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $(h, h, 0, 0)$ con h parametro reale. Una base di $E(2)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

Per calcolare $E(4)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 4I$, cioè $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -2z - 2w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $(0, 0, -h, h)$ con h parametro reale. Una base di $E(4)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

| 2 | |

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $C := (1,1)$ e la retta $r : 2x + y - 8 = 0$.

2	

(a) Determina l'equazione della circonferenza γ di centro C e tangente a r.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

Motivazione:

La distanza tra il centro di una circonferenza e una retta ad essa tangente è uguale al raggio della circonferenza. La distanza tra C e r è uguale a:

$$\frac{|2 \cdot 1 + 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}.$$

L'equazione della circonferenza cercata è allora $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

2	

(b) L'insieme dei punti interni al triangolo T delimitato da r e dagli assi cartesiani è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x + y - 8 < 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

3	

(c) Determina tutti i punti appartenenti alla circonferenza γ, alla retta $s : y - 1 = 0$ ed interni al triangolo T.

$A := (1 + \sqrt{5}, 1)$

Motivazione:

Per trovare l'intersezione di s e γ risolviamo il sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $A := (1 + \sqrt{5}, 1)$ e $B := (1 - \sqrt{5}, 1)$.

Il punto A soddisfa il sistema di disequazioni che definisce il triangolo T. Infatti:

$$\begin{cases} 2 \cdot (1 + \sqrt{5}) + 1 - 8 = -5 + 2\sqrt{5} < 0 \\ 1 + \sqrt{5} > 0 \\ 1 > 0 \end{cases}$$

Il punto B non soddisfa il sistema di disequazioni che definisce il triangolo T. Infatti:

$$\begin{cases} 2 \cdot (1 - \sqrt{5}) + 1 - 8 = -5 - 2\sqrt{5} < 0 \\ 1 - \sqrt{5} < 0 \\ 1 > 0 \end{cases}$$

Dunque l'unico punto che soddisfa le condizioni assegnate è il punto A.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine, siano dati il punto $P := (1, 4, 2)$ e le rette $r : \begin{cases} x + 3y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

2 (a) La retta n parallela a r e contenente P ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 17 = 0 \\ 2x + y + 2z - 10 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r è data come intersezione dei piani $\sigma : x+3y+2z-2=0$ e $\tau : 2x+y+2z+4=0$. Il generico piano parallelo a σ ha equazione del tipo $x + 3y + 2z + h = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo la condizione $1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + h = 0$ da cui otteniamo $h = -17$. Il generico piano parallelo a τ ha equazione del tipo $2x + y + 2z + k = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo la condizione $2 \cdot 1 + 4 + 2 \cdot 2 + k = 0$ da cui otteniamo $k = -10$. La retta cercata è allora l'intersezione dei piani $x + 3y + 2z - 17 = 0$ e $2x + y + 2z - 10 = 0$.

3 (b) Il piano π contenente P e parallelo sia a r che a s ha equazione cartesiana:

$8x + 9y + 10z - 64 = 0$

Motivazione:

Il piano cercato, dovendo essere parallelo a r, dovrà essere anche parallelo alla retta n trovata al punto precedente. Poiché π deve contenere un punto della retta n, cioè P, tutta la retta n deve essere contenuta in π. Per imporre che π sia parallelo a r e contenga il punto P basta allora imporre che π contenga n.
Consideriamo allora il fascio di piani contenenti n: $\lambda(x+3y+2z-17)+\mu(2x+y+2z-10) = 0$, riscriviamone l'equazione come $(\lambda + 2\mu)x + (3\lambda + \mu)y + (2\lambda + 2\mu)z - 17\lambda - 10\mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, -2, 1)$, otteniamo la relazione $(\lambda + 2\mu) \cdot 1 + (3\lambda + \mu) \cdot (-2) + (2\lambda + 2\mu) \cdot 1 = 0$, vale a dire $-3\lambda + 2\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 2$ e $\mu = 3$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2 (c) La retta n:

☐ è incidente il piano π ☒ giace sul piano π ☐ è parallela a π ma non giace su π

Motivazione:

Abbiamo già osservato al punto precedente che n giace sul piano π.