COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ di matrice rappresentativa $A := \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & 4k \end{pmatrix}$ con k parametro reale e sia $\mathbf{v} := (4, 1)$ un vettore di $\mathbb{R}^2$.

2 (a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di f?

$k = -2$

Motivazione:

Moltiplicando la matrice A per il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & 4k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 8+4k \end{pmatrix}$ si ottiene che $f(\mathbf{v}) = (4+2k, 8+4k)$. Questo vettore si annulla se e solo se $k = -2$, quindi $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di f solo per questo valore di k.

2 (b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f?

nessun valore

Motivazione:

La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Poiché $\det A = 0$ qualunque sia k, e A non è la matrice nulla, otteniamo che il rango di A è sempre 1. Dunque l'immagine di f ha dimensione 1 qualunque sia k. Poiché la prima colonna di A è non nulla, l'immagine di A è generata dal vettore $(1, 2)$ qualunque sia k: pertanto $\mathbf{v}$, non essendo multiplo del vettore $(1, 2)$, non appartiene all'immagine di f qualunque sia k.

Vedere il file dei commenti.

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (5, -3)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

2

(a) Determina tutti i punti C sulla retta r tali che il triangolo ABC abbia area 10.

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right) \qquad (7, 3)$

Motivazione:

La distanza di A da B è uguale a $\sqrt{(5-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{20}$. Affinché l'area del triangolo ABC sia uguale a 10, l'altezza relativa alla base AB deve allora essere uguale a $\frac{10 \cdot 2}{\sqrt{20}} = \sqrt{20}$. La retta per A e B ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 \\ 5-3 & -3-1 \end{vmatrix} = 0$ cioè $-4x - 2y + 14 = 0$. La distanza del generico punto $(1+t, -3+t)$ di r da questa retta è uguale a

$$\frac{|-4(1+t) - 2(-3+t) + 14|}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{|16 - 6t|}{\sqrt{20}}.$$

Uguagliando questa quantità a $\sqrt{20}$ troviamo l'equazione $|16 - 6t| = 20$, le cui soluzioni sono $t = -\frac{2}{3}$ e $t = 6$. Sostituendo questi valori nelle equazioni parametriche di r troviamo le coordinate dei punti cercati.

2

(b) Determina tutti i punti D sulla retta r tali che $AD = BD$.

$D := (2, -2)$

Motivazione:

Il generico punto $(1+t, -3+t)$ di r ha distanza da A uguale a

$$\sqrt{(1+t-3)^2 + (-3+t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 12t + 20}$$

e distanza da B uguale a

$$\sqrt{(1+t-5)^2 + (-3+t-(-3))^2} = \sqrt{2t^2 - 8t + 16}.$$

Uguagliando queste due distanze otteniamo $2t^2 - 12t + 20 = 2t^2 - 8t + 16$, vale a dire $-4t = -4$, la cui soluzione $t = 1$, sostituita nelle equazioni parametriche di r, dà le coordinate $(2, -2)$ del punto D cercato.

Vedere il file dei commenti.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica sia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2	

(a) Determina per quali valori f_k **non** è iniettivo.

$k = 1$

Motivazione:

L'omomorfismo f_k non è iniettivo se e solo se il rango di A_k è minore della dimensione dello spazio di partenza, cioè 3. Il minore B formato dalle prime due righe e due colonne di A_k ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A_k = 2 < 3$ se e solo se gli orlati di B hanno tutti determinante 0.

Gli orlati di B sono $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha $\det C_1 = -k^2 + 3k - 2$ e $\det C_2 = 2k^2 - 5k + 3$. Dunque $\det C_1 = 0$ per $k = 1$ o $k = 2$, mentre $\det C_2 = 0$ per $k = 1$ o $k = \frac{3}{2}$. Quindi $\det C_1$ e $\det C_2$ si annullano entrambi solo per $k = 1$.

Vedere il file dei commenti.

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 1$

2	

(b) Determina una base per $\ker f_k$.

$(-1, 0, 1)$

Motivazione:

Basta risolvere il sistema omogeneo la cui matrice rappresentativa è A_k. Sappiamo già che A_k ha rango 2, quindi è sufficiente considerare 2 equazioni indipendenti, ad esempio, quelle corrispondenti alle prime 2 righe di A:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono $(-t, 0, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

3	

(c) Determina una base ortonormale per l'immagine di f_k.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Vedere il file dei commenti.

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3

(a) Determina gli autovalori di A e una base per ciascun autospazio di A. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(0, 1, 2)$
2	$(1, 2, 2)$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & 1 \\ 4 & -x & 0 \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x(x-2)^2$, che si annulla per 0 e 2.
Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, h, 2h)$ con h parametro reale. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.
Per calcolare $E(2)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, cioè

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, 2h, 2h)$ con h parametro reale. Una base di $E(2)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

2

(b) La matrice A è diagonalizzabile? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che A ha 2 autospazi di dimensione 1. La somma delle dimensioni degli autospazi di f è, dunque, minore dell'ordine di A.

Vedere il file dei commenti.

2

(c) Esiste un autovettore di A appartenente al sottospazio E generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} := (1, 2, 3)$? Se sì, scrivi un tale vettore, se no spiega perché non esiste.

☒ Un autovettore contenuto in E è, ad esempio: $(0, 1, 2)$ *Vedere il file dei commenti.*	☐ Non esiste un autovettore contenuto in E. Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $C := (1, 1)$ e la retta $r : 2x + 3y - 18 = 0$.

2 (a) Determina l'equazione della circonferenza γ_1 di centro C e che interseca la retta r in due punti A e B distanti tra loro 4.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 17$

Motivazione:

Detta H la proiezione ortogonale di C sulla retta r, si ha che H è il punto medio di A e B. Dunque, ACH è un triangolo rettangolo in H il cui cateto AH ha lunghezza uguale alla metà della distanza di A da B, cioè 2. Il cateto CH ha invece lunghezza uguale alla distanza di C da r, cioè

$$\frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 18|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \sqrt{13}.$$

Dal teorema di Pitagora, otteniamo allora che l'ipotenusa CA ha lunghezza uguale a $\sqrt{\sqrt{13}^2 + 2^2} = \sqrt{17}$. Questo è dunque il raggio della circonferenza cercata, la cui equazione è, pertanto:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 17.$$

Vedere il file dei commenti.

2 (b) Determina l'equazione della circonferenza γ_2 di centro C e che interseca la retta r in due punti D ed E tale che CDE sia un triangolo rettangolo in C.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 26$

Motivazione:

Il punto H introdotto nella risposta precedente è il punto medio di D ed E. Poiché l'angolo $\widehat{DCE}$ è retto abbiamo che l'angolo $\widehat{DCH}$ è uguale a $\frac{\pi}{4}$. Dunque il triangolo CHD ha l'angolo in H retto, l'angolo in C uguale a $\frac{\pi}{4}$ e, pertanto, l'angolo in D uguale a $\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Poiché gli angoli in C e D sono uguali, abbiamo che i cateti CH e DH hanno la stessa lunghezza. Sappiamo già che CH ha lunghezza uguale a $\sqrt{13}$. Dal teorema di Pitagora, otteniamo allora che l'ipotenusa CD ha lunghezza uguale a $\sqrt{\sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2} = \sqrt{26}$. Questo è dunque il raggio della circonferenza cercata, la cui equazione è, pertanto:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 26.$$

3 (c) Detto F il punto d'intersezione tra le tangenti a γ_2 in D ed E, calcola la distanza di C da F

$2\sqrt{13}$

Motivazione:

Consideriamo il quadrilatero $CDFE$: l'angolo in C è retto per l'ipotesi del punto precedente; l'angolo in D è retto perché la retta DF tangente a γ_2 in D è ortogonale al raggio CD; analogamente l'angolo in E è retto. Poiché $CDFE$ ha 3 angoli retti, anche il suo quarto angolo lo è: dunque $CDFE$ è un rettangolo. I due lati consecutivi CD e CE sono uguali, dunque $CDFE$ è in realtà un quadrato. In particolare la distanza di C da F è una diagonale del quadrato ed ha lunghezza uguale all'altra diagonale, cioè DE. Dal punto precedente sappiamo che la distanza di D da E è uguale al doppio della distanza di D da H che dal punto precedente sappiamo essere uguale a $\sqrt{13}$.
Vedere il file dei commenti.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano $\pi : x + 2y + z - 10 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 8 + 3t \\ z = 7 + 2t \end{cases}$.

2 (a) Determina il punto P distante $\sqrt{6}$ dal piano π, appartenente alla retta r e al semispazio delimitato da π contenente l'origine del sistema di riferimento.

$P = (5, -1, 1)$

Motivazione:

Il generico punto $(-1 - 2t, 8 + 3t, 7 + 2t)$ di r dista

$$\frac{|(-1 - 2t) + 2(8 + 3t) + (7 + 2t) - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|6t + 12|}{\sqrt{6}}.$$

Uguagliando questa quantità a $\sqrt{6}$ otteniamo la condizione $|6t + 12| = 6$ le cui soluzioni $t = -1$ e $t = -3$ corrispondono rispettivamente ai punti $(1, 5, 5)$ e $(5, -1, 1)$ che stanno su semispazi opposti rispetto a π. Poiché $0 + 2 \cdot 0 + 0 - 10 = -10 < 0$, il semispazio contenente l'origine ha disequazione $x + 2y + z - 10 < 0$. Dal momento che $1 + 2 \cdot 5 + 5 - 10 = 6 > 0$, il punto cercato non è $(1, 5, 5)$ ed è, quindi, $(5, -1, 1)$. *Vedere il file dei commenti.*

2 (b) Determina la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π.

$H = (6, 1, 2)$

Motivazione:

La retta n passante per P e ortogonale al piano π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Intersecando questa retta con il piano π troviamo l'equazione

$$(5 + t) + 2(-1 + 2t) + (1 + t) - 10 = 0,$$

ovvero $6t - 6 = 0$, la cui soluzione è $t = 1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate del punto H.

3 (c) Determina le equazioni parametriche della retta s proiezione ortogonale di r sul piano π.

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Motivazione:

La retta s coincide con la retta passante per le proiezioni ortogonali su π di due punti di r. Dal punto precedente conosciamo già il punto H proiezione del punto P. Se ora prendiamo l'intersezione di r con π, questo punto coincide con la propria intersezione su π. Intersecando r con π abbiamo l'equazione $(-1 - 2t) + 2(8 + 3t) + (7 + 2t) - 10 = 0$, vale a dire $6t + 12 = 0$ la cui soluzione $t = -2$ ci dà il punto $Q := (3, 2, 3)$. Le equazioni parametriche della retta s sono allora: $\begin{cases} x = 6 + (3 - 6)t \\ y = 1 + (2 - 1)t \\ z = 2 + (3 - 2)t \end{cases}$