COGNOME..........................NOME..........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori $\mathbf{u} := (1, 3, 1)$ e $\mathbf{v} := (2, k, 0)$ di $\mathbb{R}^3$.

2 (a) Per quali valori di k esiste un vettore $\mathbf{w}$ tale che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

Tutti i valori di k

Motivazione:

Qualunque sia il valore di k nessuno dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è multiplo dell'altro, cioè i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. In uno spazio vettoriale di dimensione finita, dati dei vettori linearmente indipendenti, è sempre possibile aggiungere ad essi vettori opportunamente scelti in modo da ottenere una base dello spazio vettoriale. In questo caso, visto che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3, è possibile aggiungere a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ un terzo vettore opportunamente scelto.
Vedere il file dei commenti.

2 (b) Per quali valori di k esiste un vettore $\mathbf{z}$ tale che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{z}$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

$k = -\frac{2}{3}$

Motivazione:

Affinché la base sia ortogonale, i vettori devono essere a due a due ortogonali. In particolare $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono essere ortogonali. Il loro prodotto scalare è uguale a $1\cdot2+3\cdot k+1\cdot0 = 2+3k = 0$: questo si annulla se e solo se $k = -\frac{2}{3}$, dunque $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali se e solo se $k = -\frac{2}{3}$. Una volta scelto k tale che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali prendiamo un terzo vettore $\mathbf{w}$ tale che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ formano una base per $\mathbb{R}^3$. Applicando la prima parte del procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (in quest'ordine) otteniamo una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$: poiché i primi due vettori ($\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$) erano già ortogonali, il procedimento non li altera.
Vedere il file dei commenti.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine, siano dati i punti $A := (3, 1, 2)$ e $B := (4, -2, 3)$.

2	

(a) Stabilire se il segmento di estremi A e B interseca il piano $\pi : 2x + y - 3z + 11 = 0$.

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I due semispazi delimitati dal piano π sono definiti dalle disequazioni $2x + y - 3z + 11 > 0$ e $2x + y - 3z + 11 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $2x+y-3z+11$ otteniamo $2\cdot 3+1-3\cdot 2+11 = 12$. Abbiamo un numero positivo, dunque A appartiene al semispazio di disequazione $2x+y-3z+11 > 0$. Sostituendo le coordinate di B in $2x+y-3z+11$ otteniamo $2\cdot 4+(-2)-3\cdot 3+11 = 8$. Abbiamo un numero positivo, dunque B appartiene al semispazio di disequazione $2x+y-3z+11 > 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca il piano π perché A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da π.

2	

(b) Stabilire se il segmento di estremi A e B interseca la retta $r : \begin{cases} x + y + 2z - 8 = 0 \\ 2x + y - 3z + 11 = 0 \end{cases}$.

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

La retta r è contenuta nel piano π di equazione $2x + y - 3z + 11 = 0$. Poiché abbiamo già stabilito al punto precedente che il segmento non interseca il piano π, a maggior ragione non interseca la retta r.

Vedere il file dei commenti.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z, w) := (2x - 3y + z - w, y + z + w, 2x - 2y + 2z)$ e sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{u} := (1, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{v} := (0, 1, 0, 1)$.

2	

(a) Determina una base del nucleo di f.

$(-2, -1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0, 1)$

Motivazione:

Basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Poiché la terza equazione si ottiene sommando membro a membro le prime due, il sistema si può ridurre alle prime due equazioni. Le soluzioni sono $(-2h - k, -h - k, h, k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo $h = 1$ e $k = 0$ troviamo il vettore $(-2, -1, 1, 0)$; ponendo $h = 0$ e $k = 1$ troviamo il vettore $(-1, -1, 0, 1)$.

2	

(b) Determina una base dell'immagine di f.

$(2, 0, 2)$, $(-3, 1, -2)$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $\dim \ker f = 2$ e, pertanto, $\dim f(\mathbb{R}^4) = 4 - \dim \ker f = 2$. L'immagine di f è generata dalle immagini dei vettori di una base qualunque, ad esempio della base canonica: basta allora trovare 2 vettori linearmente indipendenti tra questi vettori immagine. Facendo i calcoli si vede che $f(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 2)$ e $f(0, 1, 0, 0) = (-3, 1, -2)$. Questi due vettori così trovati sono linearmente indipendenti e, pertanto, formano una base per l'immagine di f.

3	

(c) Determina una base di $\ker f \cap E$.

$(1, 1, 0, -1)$

Motivazione:

I vettori di E sono le combinazioni lineari di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, sono cioè i vettori del tipo

$$\alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 0, \beta),$$

al variare di α e β in $\mathbb{R}$. Imponiamo che il generico vettore di E soddisfi il sistema omogeneo che definisce il nucleo di f. Nel risolvere il sistema al punto a, abbiamo già notato che la terza equazione è conseguenza delle prime due. Abbiamo così:

$$\begin{cases} 2\alpha - 3(2\alpha + \beta) + 0 - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + 0 + \beta = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} -4\alpha - 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $\beta = -\alpha$, dunque i vettori di $\ker f \cap E$ sono i vettori del tipo $(\alpha, 2\alpha - \alpha, 0, -\alpha) = (\alpha, \alpha, 0, -\alpha)$. Ponendo, ad esempio, $\alpha = 1$ otteniamo una base per $\ker f \cap E$.

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Determinare gli autovalori di A.

0 2

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -2 \\ -4 & -x & 4 \\ 2 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 4x^2 - 4x$, che si annulla per 0 e 2.

Vedere il file dei commenti.

| 3 | |

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di A. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(1, -2, 1)$
2	$(1, -2, 0)$, $(0, 2, 1)$

Motivazione:

Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ -4x \qquad + 4z = 0 \\ 2x + y \qquad = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, -2h, h)$ con h parametro reale. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

Per calcolare $E(2)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, cioè

$$\begin{cases} 2x + \ y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + \ y - 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, -2h + 2k, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(2)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.

Vedere il file dei commenti.

| 2 | |

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Vedere il file dei commenti.*

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (2, 3)$, $B := (6, 5)$ e la retta $r : 3x + 2y - 7 = 0$.

2	

(a) Determina l'equazione cartesiana della retta s ortogonale a r e passante per il punto medio M di A e B.

$2x - 3y + 4 = 0$

Motivazione:

Il punto medio M di A e B ha coordinate $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (4, 4)$. La generica retta ortogonale a r ha equazione cartesiana $2x - 3y + k = 0$. Imponendo il passaggio per M otteniamo la condizione $2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = 4$. La retta s ha allora equazione $2x - 3y + 4 = 0$.

2	

(b) Determina la distanza di A da s e la distanza di B da s.

$\mathrm{d}(A, s) = \frac{1}{\sqrt{13}}$ $\quad$ $\mathrm{d}(B, s) = \frac{1}{\sqrt{13}}$

Motivazione:

Dal momento che la retta s passa per il punto medio di A e B la sua distanza da questi due punti è uguale. Infatti, se D è la proiezione ortogonale di A su s ed E è la proiezione ortogonale di B su s vediamo che i triangoli ADM e BEM sono uguali perché hanno gli angoli $\widehat{ADM}$ e $\widehat{BEM}$ uguali (perché retti), gli angoli in $\widehat{AMD}$ e $\widehat{BME}$ uguali perché opposti al vertice e i lati AM e BM uguali (perché M è punto medio di B e C). In particolare il lato AD e il lato BE sono uguali: poiché $\mathrm{d}(A, s) = \mathrm{d}(A, D)$ e $\mathrm{d}(B, s) = \mathrm{d}(B, E)$ abbiamo che A e B sono equidistanti da s.
Calcoliamo allora la distanza di A da s:

$$\mathrm{d}(A, s) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Vedere il file dei commenti.

3	

(c) Detto C il punto d'intersezione tra le rette r e s calcola l'area del triangolo AMC.

$\frac{1}{2}$

Motivazione:

Per il calcolo dell'area del triangolo, prendiamo come base il lato MC. Poiché le rette r e s sono ortogonali, la proiezione ortogonale di M (che appartiene a s) su r è l'intersezione tra r e s, cioè C. In particolare la distanza tra M e C è uguale alla distanza tra M e r, vale a dire

$$\mathrm{d}(M, C) = \mathrm{d}(M, r) = \frac{|3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}.$$

L'altezza relativa alla base MC è uguale alla distanza del punto A dalla retta passante per M e C, cioè s: sappiamo già che tale distanza è uguale a $\frac{1}{\sqrt{13}}$. Dunque il triangolo AMC ha area uguale a $\frac{\sqrt{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}}{2} = \frac{1}{2}$.
Vedere il file dei commenti.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (3, 1, 2)$ e il piano $\pi : x - 2y + 2z - 20 = 0$.

2 (a) Determina l'equazione della sfera S centrata in P e tangente il piano π.

$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$

Motivazione:

La sfera S ha raggio uguale alla distanza di P da π. La distanza di P da π è:

$$\frac{|3 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 20|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5.$$

Dunque l'equazione della sfera è: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$.

3 (b) Determina le equazioni di tutti i piani paralleli a π la cui intersezione con S è una circonferenza di raggio 4.

$x - 2y + 2z + 4 = 0 \qquad x - 2y + 2z - 14 = 0$

Motivazione:

Intersecando S con un piano distante d dal centro della sfera S si ottiene una circonferenza di raggio $\sqrt{5^2 - d^2}$ (se $d > 5$ l'intersezione tra piano e circonferenza è vuota). Dall'equazione $\sqrt{25 - d^2} = 4$ ricaviamo allora $d = 3$.
Il generico piano parallelo al piano π ha equazione $x - 2y + 2z + k = 0$. Imponendo che la distanza di questo generico piano da P sia 3 otteniamo l'equazione:

$$\frac{|3 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3,$$

cioè $|k + 5| = 9$ le cui soluzioni sono 4 e -14.
Vedere il file dei commenti.

2 (c) Determina i centri delle circonferenze di raggio 4 determinate al punto precedente.

$(2, 3, 0) \qquad (4, -1, 4)$

Motivazione:

I centri sono le proiezioni ortogonali di P sui piani determinati al punto precedente. La retta s passante per P e ortogonale al piano di equazione $x - 2y + 2z + 4 = 0$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Intersecando questa retta con il piano $x - 2y + 2z + 4 = 0$ troviamo l'equazione

$$(3 + t) - 2(1 - 2t) + 2(2 + 2t) + 4 = 0,$$

ovvero $9t + 9 = 0$, la cui soluzione è -1. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del centro della prima circonferenza. La retta s è ortogonale anche al piano $x - 2y + 2z - 14 = 0$. Intersecando s con questo piano troviamo l'equazione

$$(3 + t) - 2(1 - 2t) + 2(2 + 2t) - 14 = 0,$$

ovvero $9t - 9 = 0$, la cui soluzione è 1. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del centro della seconda circonferenza.
Vedere il file dei commenti.