COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che rispetto alla base formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 := (1,1)$ si rappresenta con la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 (a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Le colonne della matrice A danno le immagini dei vettori della base $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ decomposti rispetto alla base stessa. Dunque abbiamo $f(\mathbf{v}_1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = 1(1,0) + 0(1,1) = (1,0)$ e $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 2(1,0) + 3(1,1) = (5,3)$.
Dobbiamo ora esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Si vede facilmente che si ha $(1,0) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ e $(0,1) = -1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2$. Abbiamo pertanto $f(1,0) = 1f(\mathbf{v}_1) + 0f(\mathbf{v}_2) = (1,0)$ e $f(0,1) = -1f(\mathbf{v}_1) + 1f(\mathbf{v}_2) = -(1,0) + (5,3) = (4,3)$.
La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è allora $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2 (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\mathbf{u}_1 := (1,1)$ e $\mathbf{u}_2 := (1,0)$ (in quest'ordine).

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Dobbiamo esprimere le immagini dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ come combinazione lineare dei vettori stessi. I vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ non sono altri che i vettori $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1$ rispettivamente. Poiché sappiamo che $f(\mathbf{v}_1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ e $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, otteniamo immediatamente che $f(\mathbf{u}_1) = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$ e $f(\mathbf{u}_2) = 0\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2$. Dunque la matrice rappresentativa è $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Siano dati i punti $A := (1, 2, 1, 0, 1)$ e $B := (1, 0, 2, 1, 1)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4 = 0$ di $\mathbb{R}^5$.

2	

(a) Il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I due semispazi delimitati da π sono definiti dalle disequazioni $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4 > 0$ e $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4$ otteniamo $1 - 2 \cdot 2 + 1 - 0 + 1 - 4 = -5$. Il risultato è negativo, dunque A appartiene al semispazio $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4 < 0$. Sostituendo le coordinate di B in $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4$ otteniamo $1 - 2 \cdot 0 + 2 - 1 + 1 - 4 = -1$. Il risultato è negativo, dunque A appartiene al semispazio $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4 < 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca l'iperpiano π perché A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da π.

2	

(b) La semiretta di origine A e contenente B interseca l'iperpiano π?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (1 - 1)t \\ x_2 = 2 + (0 - 2)t \\ x_3 = 1 + (2 - 1)t \\ x_4 = 0 + (1 - 0)t \\ x_5 = 1 + (1 - 1)t \end{cases}$$

I punti della semiretta di origine A e contenente B sono quelli corrispondenti ai valori positivi del parametro t.
Intersecando la retta r con l'iperpiano π si ottiene l'equazione $1 - 2(2 - 2t) + (1 + t) - t + 1 - 4 = 0$ cioè $4t - 5 = 0$ la cui soluzione è $t = \frac{5}{4}$. Poiché questo è un valore positivo, l'intersezione tra r e s è un punto della semiretta di origine A e contenente B.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Si consideri il sistema di equazioni $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + z = k - 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - z = 1 - k \end{cases}$ dove k è un parametro reale.

2 (a) Determina i valori di k per cui $(x, y, z) = (1, 2, 4)$ è soluzione del sistema.

$k = 4$

Motivazione:

Sostituendo i valori assegnati nel sistema otteniamo $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ 1 - 2 + 4 = k - 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 4 = 0 \\ 1 - 4 = 1 - k \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 0 = 0 \\ 3 = k - 1 \\ 0 = 0 \\ -3 = 1 - k \end{cases}$.
L'unico valore per cui tutte le equazioni sono soddisfatte è $k = 4$.

2 (b) Determina i valori di k per cui l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

$k = 1$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Uguagliando a 0 tutti i termini noti delle equazioni del sistema si ottiene $k = 1$.

3 (c) Determina i valori di k per cui il sistema è risolubile.

Ogni valore di k

Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema è risolubile se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.
La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Poiché il minore formato dalle prime 3 righe e 3 colonne ha determinante non nullo la matrice ha rango 3. La matrice completa del sistema è invece $A' := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & k-1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1-k \end{pmatrix}$. Il suo rango non può essere inferiore a quello della matrice A.
Calcoliamo il determinante dell'unico minore di ordine 4 cioè la matrice A' stessa. Svolgendo i calcoli si ottiene $\det A' = 0$ qualunque sia k, dunque la matrice A' ha rango 3 qualunque sia k. Pertanto il sistema è risolubile per ogni valore di k.

4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da $f(x, y, z, w) := (x+y+2w, 2x-2y+z-3w, 4x+z+w)$.

2 (a) Determina una base dell'immagine di f.

$(1, 2, 4)$, $(1, -2, 0)$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché il minore formato dalle prime 2 righe e dalle prime 2 colonne è invertibile, mentre i suoi orlati, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hanno determinante nullo, la matrice A ha rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime 2 colonne di A formano una base per l'immagine.

2 (b) Determina una base del nucleo di f.

$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo: $\begin{cases} x + y + 2w = 0 \\ 2x - 2y + z - 3w = 0 \\ 4x + z + w = 0 \end{cases}$.

Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che la prime 2 righe sono linearmente indipendenti. Dunque il sistema è equivalente al sistema formato dalle prime 2 equazioni $\begin{cases} x + y + 2w = 0 \\ 2x - 2y + z - 3w = 0 \end{cases}$. Trattando z e w come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $\left(\frac{-h-k}{4}, \frac{h-7k}{4}, h, k\right)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right)$.

3 (c) Stabilire se esistono due vettori distinti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ e in caso positivo dare due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siffatti.

Due vettori come quelli cercati esistono: ad esempio $(1, 0, 0, 0)$ e $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$

Motivazione:

Due vettori hanno la stessa immagine se e solo se la loro differenza appartiene al nucleo. Poiché nel nostro caso il nucleo contiene vettori diversi dal vettore nullo, possiamo determinare due vettori come quelli cercati se troviamo un vettore la cui immagine sia diversa dal vettore nullo e gli sommiamo un vettore non nullo del nucleo.

Sappiamo già che il nucleo non coincide con tutto $\mathbb{R}^4$ dal momento che f non è l'omomorfismo nullo: in particolare se prendiamo i vettori di una base (ad esempio quella canonica) non appartengono tutti al nucleo. Calcoliamo allora successivamente le immagini dei vettori della base canonica finché ne troviamo uno la cui immagine non è il vettore nullo. Abbiamo che $f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 4)$. Non c'è bisogno di fare ulteriori calcoli. Poniamo $\mathbf{u} := (1, 0, 0, 0)$. Sommiamo ora a $\mathbf{u}$ un vettore non nullo del nucleo, ad esempio $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$, e poniamo $\mathbf{v} := (1, 0, 0, 0) + \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia dato il punto $A := (2, h)$ con h parametro reale e la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$. Siano r e s le due rette tangenti a γ e passanti per A e siano R e S i due punti di tangenza. Sia C il centro di γ.

2	

(a) Determina i valori di h per cui almeno una delle due rette r e s è parallela alla retta $t : x-y = 0$.

$h = 4 + 3\sqrt{2}$ e $h = 4 - 3\sqrt{2}$

Motivazione:

Se riscriviamo l'equazione della circonferenza come $(x + 2)^2 + y^2 - 9 = 0$ vediamo che $C = (-2, 0)$ e che il raggio di γ è 3.
La generica retta parallela a t ha equazione $x - y + k = 0$.
Imponendo che la distanza di questa generica retta dal centro di γ sia 3 otteniamo la condizione $\frac{|-2-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3$, vale a dire $|k - 2| = 3\sqrt{2}$ le cui soluzioni sono $k = 2 + 3\sqrt{2}$ e $k = 2 - 3\sqrt{2}$. Le due rette parallele a t e tangenti a γ sono allora $x - y + 2 + 3\sqrt{2} = 0$ e $x - y + 2 - 3\sqrt{2} = 0$. Il punto A appartiene alla prima se $2 - h + 2 + 3\sqrt{2} = 0$, cioè se $h = 4 + 3\sqrt{2}$ e appartiene alla seconda se $2 - h + 2 - 3\sqrt{2} = 0$ cioè se $h = 4 - 3\sqrt{2}$.

2	

(b) Determina i valori di h per cui il quadrilatero $ARCS$ è un quadrato.

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

Motivazione:

La diagonale AC è asse di simmetria del quadrilatero $ARCS$ e divide quindi il quadrilatero nei due triangoli uguali ARC e ASC. Affinché il quadrilatero $ARCS$ sia un quadrato è quindi necessario e sufficiente che ARC sia un triangolo isoscele rettangolo in R. Poiché la tangente a una circonferenza è ortogonale al raggio condotto dal punto di tangenza abbiamo che il triangolo ARC è rettangolo in R.
Per il teorema di Pitagora abbiamo inoltre $\mathrm{d}(A, R)^2 + \mathrm{d}(R, C)^2 = \mathrm{d}(A, C)^2$. Poiché la distanza di C da R è uguale al raggio di γ cioè 3, abbiamo che $\mathrm{d}(A, R) = \mathrm{d}(R, C)$ se e solo se $\mathrm{d}(A, C)^2 = 3^2 + 3^2 = 18$. Imponendo questa condizione otteniamo $(2-(-2))^2 + (h-0)^2 = 18$ cioè $h^2 = 2$ da cui otteniamo i valori $h = \sqrt{2}$ e $h = -\sqrt{2}$.

3	

(c) Determina i valori di h per cui il quadrilatero $ARCS$ ha area 9.

4 e -4

Motivazione:

Sappiamo già che il quadrilatero è formato da due triangoli rettangoli uguali. Calcoliamo l'area di uno di questi, ad esempio ARC. Il cateto CR è uguale al raggio della circonferenza γ, cioè 3, mentre l'ipotenusa AC, cioè la distanza di C da A è uguale a $\sqrt{(2-(-2))^2 + (h-0)^2} = \sqrt{h^2 + 16}$. Per il teorema di Pitagora il cateto AR è allora uguale a $\sqrt{(h^2 + 16) - 3^2} = \sqrt{h^2 + 7}$. Il triangolo ARC ha allora area $\frac{3 \cdot \sqrt{h^2+7}}{2}$ e il quadrilatero $ARCS$ ha area $3\sqrt{h^2 + 7}$. Imponendo che quest'area sia uguale a 9 otteniamo $3\sqrt{h^2 + 7} = 9$, cioè $h^2 + 7 = 3^2$ da cui ricaviamo $h = \sqrt{2}$ e $h = -\sqrt{2}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ e i punti $A := (2, 3, -2)$ e $B := (1, 0, -2)$.

2

(a) La retta s parallela a r e passante per A ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 3y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r è data come intersezione dei piani $\alpha : x + y + z - 1 = 0$ e $\beta : x - 3y + 2z - 2 = 0$. Consideriamo il fascio di piani paralleli a α:

$$x + y + z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo $2 + 3 + (-2) + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -3$. Il piano α' parallelo a α e passante per A ha allora equazione $x + y + z - 3 = 0$.
Consideriamo ora il fascio di piani paralleli a β:

$$x - 3y + 2z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo $2 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + k = 0$, da cui ricaviamo $k = 11$. Il piano β' parallelo a β e passante per A ha allora equazione $x - 3y + 2z + 11 = 0$.
La retta s è l'intersezione di α' e β'.

3

(b) Il piano π parallelo a r e passante per A e B ha equazione:

$3x - y + 4z + 5 = 0$

Motivazione:

Il piano π, essendo parallelo a r, è parallelo anche a s. Poiché π contiene un punto di s, cioè A, il piano π contiene la retta s. Se ora consideriamo il fascio di piani passanti per s

$$\lambda(x + y + z - 3) + \mu(x - 3y + 2z + 11) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per il punto B otteniamo la condizione

$$\lambda(1 + 0 - 2 - 3) + \mu(1 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 11) = 0$$

vale a dire $-4\lambda + 8\mu = 0$. Ponendo, ad esempio, $\lambda = 2$ e $\mu = 1$ nell'equazione del fascio otteniamo il piano cercato.

2

(c) La distanza tra il piano π e la retta r è:

$\frac{9}{\sqrt{26}}$

Motivazione:

Poiché la retta e il piano sono paralleli, la distanza tra essi è uguale alla distanza di un punto arbitrario sulla retta il piano. Prendiamo allora un punto su r, ad esempio $P := (0, 0, 1)$, e calcoliamo la sua distanza da π:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{26}}.$$