22 SETTEMBRE 2009 - SOLUZIONE ESAME DI GEOMETRIA - 12 CREDITI
INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2008-2009

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^5$ siano dati i due iperpiani $\pi : x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6=0$ e $\sigma : x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+2=0$ e il punto $A := (1,0,2,0,2)$.

2 (a) Determina la disequazione del semispazio delimitato da π e contenente σ.

$x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6>0$

Motivazione:

L'iperpiano π divide $\mathbb{R}^5$ nei semispazi definiti dalle disequazioni $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6>0$ e $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6<0$. Poiché i due iperpiani sono paralleli, l'iperpiano σ è interamente contenuto in uno dei due iperpiani. Prendiamo allora un punto qualunque di σ, ad esempio $(-2,0,0,0,0)$ e sostituiamo le sue coordinate nel polinomio $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6$: otteniamo $-2+0-0+2\cdot 0-0+6=4>0$. Dunque il semispazio cercato ha disequazione $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6>0$.

2 (b) Stabilire se il punto A appartiene alla regione compresa tra π e σ.

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

La regione compresa tra i due iperpiani è data dall'intersezione tra il semispazio delimitato da π e contenente σ e il semispazio delimitato da σ e contenente π. Dal punto precedente sappiamo che il primo di questi semispazi ha disequazione $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6>0$. Sostituendo le coordinate del punto A nel polinomio $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+6$ troviamo $1+0-2+2\cdot 0-2+6=3>0$. Dunque A appartiene al semispazio in questione.
I due semispazi delimitati da σ hanno disequazioni rispettive $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+2>0$ e $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+2<0$. Analogamente a quanto visto al punto precedente, prendiamo un punto qualunque di π, ad esempio $(-6,0,0,0,0)$, e sostituiamo le sue coordinate nel polinomio $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+2$. Poiché $-6+0-0+2\cdot 0-0+2=-4<0$, il semispazio delimitato da σ e contenente π ha disequazione $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+2<0$. Sostituendo ora le coordinate di A nel polinomio $x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5+2$ troviamo $1+0-2+2\cdot 0-2+2=-1<0$. Dunque il punto A appartiene anche a questo semispazio. Il punto A appartiene dunque a entrambi i semispazi la cui intersezione definisce la regione compresa tra i due iperpiani.

2. Sia V uno spazio vettoriale dotato di una base formata dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{e}_4$. Si considerino i vettori $\mathbf{u} := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4$, $\mathbf{v} := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ e $\mathbf{w} := 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

2	

(a) Quante basi di V che contengono tutti e tre i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ esistono?

Nessuna

Motivazione:

Se consideriamo la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono date dalla decomposizione dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto alla base formata dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{e}_4$, vediamo che essa ha rango 2: infatti il minore formato dalle prime due righe e colonne di A ha determinante non nullo, mentre i suoi due orlati hanno determinante nullo. Pertanto i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. Comunque si aggiungano vettori ad essi si ottengono vettori linearmente dipendenti e non si può quindi ottenere una base.

2	

(b) Esiste un sottospazio affine di V di dimensione 1 contenente i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

Un sottospazio affine di dimensione 1 contenente $\mathbf{u}$ è del tipo $\mathbf{u} + E$ con E sottospazio vettoriale di dimensione 1. I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ appartengono a $\mathbf{u} + E$ se e solo se esistono $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{w}}$ tali che $\mathbf{u} + \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$. In altri termini i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ appartengono a $\mathbf{u} + E$ se e solo se $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ e $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ appartengono a E. I vettori $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ e $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ sono rispettivamente $-\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4$ e $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Questi vettori non sono multipli uno dell'altro, quindi non esiste nessun sottospazio vettoriale E di dimensione 1 che li contiene entrambi.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale $E_k := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 - 2x_2 + kx_3 = 0, x_1 - x_2 - kx_4 = 0\}$ con k parametro reale e il sottospazio vettoriale F generato da $\mathbf{u} := (2, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} := (0, 1, 1, 2)$.

2 | (a) Determina , in dipendenza del valore di k, la dimensione di E_k.

$\dim E_k = 2$ qualunque sia k

Motivazione:

Il sottospazio F_k è dato come insieme delle soluzioni del sistema omogeneo di 2 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + kx_3 & = 0 \\ x_1 - \ \ x_2 \qquad - kx_4 = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -k \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2 qualunque sia il valore di k (infatti il minore formato dalle prime due colonne è sempre invertibile). Pertanto $\dim E_k = 4 - 2 = 2$ per ogni valore di k.

2 | (b) Determina i valori di k per cui il vettore $\mathbf{u}$ appartiene a E_k.

$k = 1$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{u}$ appartiene a E_k se e solo se

$$\begin{cases} 2 - 2 \cdot 1 + k \cdot 0 = 0 \\ 2 - \ \ 1 \qquad - k \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -k + 1 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $k = 1$.

3 | (c) Determina i valori di k per cui la somma $E_k + F$ è diretta.

$k \neq 1$ e $k \neq 2$

La somma $E_k + F$ è diretta se e solo se $E_k \cap F = \{\mathbf{0}\}$. Il generico vettore di F è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cioè è del tipo $\alpha(2, 1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1, 2) = (2\alpha, \alpha + \beta, \beta, \alpha + 2\beta)$. Inoltre questo vettore si annulla se e solo se sia α che β si annullano: infatti i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, non essendo uno multiplo dell'altro, sono linearmente indipendenti. Calcoliamo l'intersezione $E_k \cap F$:

$$\begin{cases} 2\alpha - 2(\alpha + \beta) + k\beta = 0 \\ 2\alpha - \ (\alpha + \beta) \qquad - k(\alpha + 2\beta) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} (k - 2)\beta = 0 \\ (1 - k)\alpha + (-2k - 1)\beta = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo in α e β la cui matrice dei coefficienti è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & k-2 \\ 1-k & -2k-1 \end{smallmatrix}\right)$ ha determinante $(k-2)(k-1)$. Se il determinante si annulla, cioè se $k = 1$ o $k = 2$, esistono soluzioni non banali al sistema, cioè esistono vettori non nulli in $E_k \cap F$. Se il determinante non si annulla l'intersezione $E_k \cap F$ contiene solo il vettore nullo e la somma $E_k + F$ è diretta.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 (a) Determina una base dell'immagine di f.

$(1, 0, 0, 1)$, $(0, 2, -2, 0)$

Motivazione:

Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti perché non sono una multipla dell'altra. La terza colonna è l'opposto della seconda e la quarta è uguale alla prima. Dunque le prime due colonne di A formano una base per lo spazio vettoriale generato dalle colonne. La matrice A ha, dunque, rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime due colonne di A formano una base per l'immagine di f.

2 (b) Determina una base del nucleo di f.

$(0, 1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$
Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che quindi è sufficiente considerare due equazioni linearmente indipendenti. Possiamo prendere, ad esempio, le prime due e ottenere il sistema equivalente
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$
Trattando x_3 e x_4 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(-k, h, h, k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $(0, 1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 0, 1)$.

3 (c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano date le rette $r : 2x - y + 3 = 0$, $s : x - 3y - 1 = 0$ e $t : x - 4 = 0$. Sia T il triangolo delimitato dalle tre rette r, s e t.

| 2 | |

(a) Determina l'area del triangolo T.

30

Motivazione:

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$ troviamo il punto $A := (-2, -1)$ intersezione di r e s. Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$ troviamo il punto $B := (4, 11)$ intersezione di r e t. Risolvendo il sistema $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$ troviamo il punto $C := (4, 1)$ intersezione di s e t.
Se prendiamo come base del triangolo T il lato BC la sua altezza relativa a tale base è uguale alla distanza di A dalla retta t, cioè $|-2-4| = 6$. La base BC misura $\sqrt{(4-4)^2 + (11-1)^2} = 10$. Dunque il triangolo ha area $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30$.

| 3 | |

(b) Determina il punto di intersezione degli assi del triangolo T.

$H := (-1, 6)$

Motivazione:

La retta t passante per B e C è parallela all'asse y, dunque l'asse del lato BC è parallelo all'asse x, cioè ha equazione del tipo $y + k = 0$. Tale asse deve passare per il punto medio dei punti B e C, cioè $M := \left(\frac{4+4}{2}, \frac{11+1}{2}\right) = (4, 6)$. Dunque l'asse di questo lato ha equazione $y - 6 = 0$.
L'asse del lato AB passa per il punto medio dei punti A e B, cioè $N := \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+11}{2}\right) = (1, 5)$. L'asse è inoltre ortogonale alla retta r e quindi ha equazione del tipo $x + 2y + h = 0$. Imponendo il passaggio per N troviamo la condizione $1 + 2 \cdot 5 + h = 0$ da cui troviamo $h = -11$, e, quindi, l'asse ha equazione $x + 2y - 11 = 0$.
Intersecando i due assi così trovati abbiamo il sistema $\begin{cases} y - 6 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$ la cui soluzione $(-1, 6)$ dà le coordinate del punto cercato.

| 2 | |

(c) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza passante per i vertici del triangolo T.

$(x+1)^2 + (y-6)^2 = 50$

Motivazione:

Sappiamo che la circonferenza passante per i vertici di un triangolo, cioè la circonferenza circoscritta al triangolo, ha centro nell'intersezione degli assi del triangolo. Abbiamo già determinato al punto precedente il centro $H = (-1, 6)$ di questa circonferenza. Calcolando la distanza del centro da uno qualsiasi dei vertici del triangolo, ad esempio A, troviamo che la circonferenza ha raggio $\sqrt{(-2-(-1))^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{50}$. Dunque la circonferenza ha equazione $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 50$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x = 1 \quad + 2t \\ y = 2 \quad - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

2

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione cartesiana:

$x - 7y - 3z + 10 = 0$

Motivazione:

Un piano contiene r se e solo se è parallelo al vettore direttore $(2, -1, 3)$ di r e contiene un punto arbitrario di r, ad esempio $A := (1, 2, -1)$. Un piano è parallelo a s se e solo se è parallelo al vettore direttore $(-1, -1, 2)$ di s.
Dunque il piano π è determinato dal passaggio per A e per il parallelismo a due vettori. La sua equazione si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-(-1) \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata, dà l'equazione $x - 7y - 3z + 10 = 0$.

3

(b) Il piano σ parallelo a r e s ed equidistante da essi ha equazione cartesiana:

$x - 7y - 3z + 12 = 0$

Motivazione:

Il piano σ è parallelo alle rette r e s. Anche il piano π, determinato al punto precedente, è parallelo alle rette r e s. Pertanto il piano σ è parallelo al piano π e ha, quindi, equazione del tipo $x - 7y - 3z + k = 0$.
Per calcolare la distanza di σ da r, dato che r e σ sono paralleli possiamo prendere un punto qualsiasi di r, ad esempio $A := (1, 2, -1)$, e calcolare la sua distanza da σ. Otteniamo così $\frac{|1-7\cdot 2-3\cdot(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-7)^2+(-3)^2}} = \frac{|k-10|}{\sqrt{59}}$.
Analogamente la distanza di σ da s è uguale alla distanza da σ di un punto qualsiasi di s, ad esempio $B := (2, 1, 3)$. Otteniamo così $\frac{|2-7\cdot 1-3\cdot 3+k|}{\sqrt{1^2+(-7)^2+(-3)^2}} = \frac{|k-14|}{\sqrt{59}}$.
Uguagliando le due espressioni ottenute troviamo l'equazione $\frac{|k-10|}{\sqrt{59}} = \frac{|k-14|}{\sqrt{59}}$, vale a dire $|k - 10| = |k - 14|$. Essa è soddisfatta se e solo se $k - 10 = k - 14$ o $k - 10 = -(k - 14)$. La prima condizione non ha soluzioni, mentre la seconda dà la soluzione $k = 12$. Pertanto il piano σ ha equazione $x - 7y - 3z + 12 = 0$.

2

(c) La distanza tra il piano π e la retta s è:

$\frac{4}{\sqrt{59}}$

Motivazione:

Come già notato al punto precedente, poiché la retta e il piano sono paralleli, la distanza tra essi è uguale alla distanza di un punto arbitrario sulla retta il piano. Prendiamo allora il punto $B := (2, 1, 3)$ su s e calcoliamo la sua distanza da π:

$$\mathrm{d}(s, \pi) = \mathrm{d}(B, \pi) = \frac{|2 - 7 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{59}}.$$