COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, si considerino le due circonferenze di equazioni $\gamma_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $\gamma_2 : (x+1)^2 + (y-7)^2 = k$ con k parametro reale.

2 | (a) Per quali valori di k le due circonferenze γ_1 e γ_2 sono tangenti esternamente?

$k = 9$

Motivazione:

Due circonferenze sono tangenti esternamente se e solo se la distanza tra i loro centri è uguale alla somma dei raggi.
La circonferenza γ_1 ha centro $(2, 3)$ e raggio 2. La circonferenza γ_2 ha centro $(-1, 7)$ e raggio $\sqrt{k}$. (Se $k < 0$ l'equazione non rappresenta una circonferenza).
La distanza tra i due centri è $\sqrt{(2-(-1))^2 + (3-7)^2} = 5$. La distanza tra i centri è uguale alla somma dei raggi se e solo se $5 = 2 + \sqrt{k}$, il che avviene se e solo se $k = 9$: dunque le due circonferenze sono tangenti esternamente se e solo se $k = 9$.

2 | (b) Per quali valori di k le due circonferenze γ_1 e γ_2 sono tangenti internamente?

$k = 49$

Motivazione:

Due circonferenze sono tangenti internamente se e solo se la distanza tra i loro centri è uguale al valore assoluto della differenza dei raggi.
Usando i calcoli svolti al punto precedente, abbiamo allora la condizione $5 = |2 - \sqrt{k}|$, che si verifica se $5 = 2 - \sqrt{k}$ o $-5 = 2 - \sqrt{k}$. Nel primo caso otteniamo $\sqrt{k} = -3$ il che non può essere, mentre nel secondo caso otteniamo $\sqrt{k} = 7$, da cui otteniamo $k = 49$: dunque le due circonferenze sono tangenti internamente se e solo se $k = 49$.

2. Siano dati i punti $A := (1, 0, 1, 1, 1)$, $B := (2, 1, 1, 1, 1)$, $C := (1, 0, 2, 1, 2)$ e $D_k := (3, k, 2, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^5$ con k parametro reale.

| 2 | |

(a) Per quali valori di k l'inviluppo affine dei punti A, B, C e D_k ha dimensione 4?

Nessun valore di k

Motivazione:

L'inviluppo affine di n punti ha dimensione minore o uguale di $n - 1$. Dunque l'inviluppo affine di A, B, C e D_k non ha mai dimensione uguale a 4.

| 2 | |

(b) Per quali valori di k l'inviluppo affine dei punti A, B, C e D_k ha dimensione 3?

$k \neq 2$

Motivazione:

L'inviluppo affine di A, B, C e D_k ha dimensione uguale al sottospazio vettoriale generato dai vettori $B - A = (1, 1, 0, 0, 0)$, $C - A = (0, 0, 1, 0, 1)$ e $D_k - A = (2, k, 1, 0, 1)$. La dimensione di tale sottospazio è uguale al rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti di questi vettori rispetto alla base canonica. Poiché la quarta riga è nulla e la quinta riga è uguale alla terza, il rango di questa matrice è uguale al rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il determinante di questa matrice è uguale a $2 - k$. Pertanto, per $k \neq 2$ la matrice ha rango 3: l'inviluppo affine ha dimensione 3; per $k = 2$ il rango della matrice è minore di 3: l'inviluppo affine ha dimensione minore di 3.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina una base dell'immagine di f.

$(0, -2, 2, -1)$, $(0, -2, 6, 1)$

Motivazione:

Il minore B formato dalla seconda e terza riga e dalle prime due colonne è invertibile. Questo minore ha 4 orlati: i 2 che si ottengono utilizzando la prima riga di A hanno una riga nulla e hanno, pertanto, determinante nullo, gli altri 2 sono $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Svolgendo i calcoli si trova che anche questi hanno determinante nullo. Tutti gli orlati di B hanno, quindi, determinante nullo. Pertanto A ha rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime due colonne di A formano una base per l'immagine di f.

2

(b) Determina una base del nucleo di f.

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$
. Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che quindi è sufficiente considerare due equazioni linearmente indipendenti. Possiamo prendere, ad esempio, la seconda e la terza e ottenere il sistema equivalente
$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$
. Trattando x_3 e x_4 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $\left(-\frac{1}{2}h + \frac{3}{2}k, -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k, h, k\right)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

3

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Si consideri il sistema di equazioni nelle incognite x, y, z e w $\begin{cases} x + 2y + z = k - 2 \\ x + y + z + w = 0 \\ 3x + 5y + 3z + w = k \end{cases}$ dove k è un parametro reale.

2 (a) Determina i valori di k per cui il sistema ha esattamente una soluzione.

Nessun valore

Motivazione:

Un sistema ha un'unica soluzione se e solo se il rango della matrice del sistema e il rango della matrice completa del sistema sono entrambi uguali al numero delle incognite. La matrice del sistema ha 3 righe, quindi il suo rango è al massimo 3 e non esiste alcun valore di k per cui sia uguale al numero delle incognite, cioè 4.

3 (b) Determina i valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

$k = 4$

Motivazione:

Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema è risolubile se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.
La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il minore B formato dalle prime 2 righe e 2 colonne è invertibile. I suoi orlati sono $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Entrambi hanno determinante nullo: dunque la matrice A ha rango 2. La matrice completa del sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & k-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & k \end{pmatrix}$. L'unico orlato di B in essa che non sia anche un minore di A è $C_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & k \end{pmatrix}$, il cui determinante è $k - 4$. Per $k \neq 4$, tale minore ha determinante non nullo e, dunque, il rango della matrice completa del sistema è 3: il sistema non è risolubile; per $k = 4$, il minore ha determinante nullo e, dunque, la matrice completa del sistema ha rango 2. Pertanto, per $k = 4$, sia la matrice del sistema che la matrice completa del sistema hanno rango 2: il sistema è quindi risolubile e ha soluzioni dipendenti da $4 - 2 = 2 > 0$ parametri, cioè ha infinite soluzioni.

2 (c) Determina i valori di k per cui il sistema ammette la soluzione banale.

Nessun valore

Motivazione:

Un sistema lineare ammette la soluzione banale se e solo se è omogeneo. Poiché non c'è alcun valore di k per cui i termini noti di tutte le equazioni si annullano simultaneamente, non c'è alcun valore di k per cui il sistema ammette la soluzione banale.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine, siano date le rette $r : x+y+1 = 0$, $s : 2x-y+2 = 0$ e $t : x - y + 3 = 0$. Siano A il punto di intersezione di r e s, B il punto di intersezione di r e t e C il punto di intersezione delle rette s e t.

2

(a) La retta parallela a t e passante per il punto A di intersezione tra r e s ha equazione cartesiana:

$x - y + 1 = 0$

Motivazione:

Le rette passanti per il punto A sono tutte e sole quelle appartenenti al fascio generato da r e s, vale a dire quelle di equazione del tipo: $\lambda(x + y + 1) + \mu(2x - y + 2) = 0$ che può essere riscritta così $(\lambda + 2\mu)x + (\lambda - \mu)y + (\lambda + 2\mu) = 0$.
Questa equazione rappresenta una retta parallela a t se e solo se $(\lambda + 2\mu, \lambda - \mu)$ e $(1, -1)$ sono proporzionali, il che avviene se e solo se $(\lambda + 2\mu) \cdot 1 - (\lambda - \mu) \cdot (-1) = 0$, vale a dire $2\lambda + \mu = 0$. Scegliendo, ad esempio, $\lambda = -1$ e $\mu = 2$, troviamo l'equazione della retta $3x - 3y + 3 = 0$, o, equivalentemente, $x - y + 1 = 0$.

2

(b) Determina un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$D := (2, 3)$

Motivazione:

I punti A e B appartengono a r, mentre i punti B e C appartengono a t. Poiché r e t sono incidenti, il parallelogramma è non degenere. Il punto D è, quindi, l'intersezione della retta passante per A e parallela a t e della retta parallela a r e passante per C. Dal punto precedente conosciamo già la prima delle due rette cercate. Per determinare l'equazione della retta parallela a r e passante per C, procediamo in maniera analoga. Il fascio di rette passante per C è generato dalle rette t e s e ha quindi equazione: $\lambda(x-y+3)+\mu(2x-y+2) = 0$ vale a dire $(\lambda + 2\mu)x + (-\lambda - \mu)y + (3\lambda + 2\mu) = 0$.
Imponendo il parallelismo con r troviamo la condizione $(\lambda + 2\mu) \cdot 1 - (-\lambda - \mu) \cdot 1 = 0$ vale a dire $2\lambda+3\mu = 0$. Scegliendo, ad esempio, $\lambda = -3$ e $\mu = 2$ troviamo l'equazione $x+y-5 = 0$.
Intersecando le due rette troviamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione $(2, 3)$ dà le coordinate del punto cercato.

3

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo delimitato dalle rette r, s e t è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ 2x - y + 2 < 0 \\ x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $A := (1, 2, -1)$ e la retta $r : \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$

3	

(a) La proiezione ortogonale B di A sulla retta r ha coordinate

$B = (3, 1, 1)$

Motivazione:

Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane della retta r, troviamo le sue equazioni parametriche, da cui ricaviamo che r ha parametri direttori $(1, 0, -1)$. Il generico piano ortogonale a r ha allora equazione del tipo $x - z + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto A troviamo la condizione $1 - (-1) + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -2$. Il piano ortogonale a r e passante per A ha allora equazione $x - z - 2 = 0$. Intersecando questo piano con la retta r troviamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione $(3, 1, 1)$ dà le coordinate del punto cercato.

2	

(b) La sfera Σ di centro A e tangente alla retta r ha equazione cartesiana:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$

Motivazione:

La retta passante per A e B è incidente la retta r in B e ortogonale a essa. Dunque r è tangente alla sfera centrata in A e passante per B. La distanza tra A e B è uguale a $\sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (1-(-1))^2} = 3$. La sfera cercata ha allora raggio 3 ed equazione cartesiana $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

2	

(c) Il piano π contenente r e tangente a Σ ha equazione cartesiana:

$2x - y + 2z - 7 = 0$

Motivazione:

Il punto di tangenza tra la sfera Σ e la retta r è il punto B determinato in precedenza. Dunque B è pure il punto di tangenza tra Σ e il piano Π cercato. Tale piano è, pertanto, ortogonale alla retta congiungente A con B. I parametri direttori di questa retta sono $(3 - 1, 1 - 2, 1 - (-1)) = (2, -1, 2)$. Il generico piano ortogonale alla retta passante per A e B ha allora equazione $2x - y + 2z + k = 0$. Imponendo il passaggio per B, troviamo la condizione $2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 1 + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -7$. Il piano cercato ha, dunque, equazione $2x - y + 2z - 7 = 0$.