COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 := (1, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 := (2, k, 4)$ e $\mathbf{v}_3 := (1, 3, k)$ di $\mathbb{R}^3$.

2 (a) Per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

$k \neq 4$ e $k \neq 2$

Motivazione:

Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ 2 & 4 & k \end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ rispetto alla base canonica. Questa matrice ha determinante $k^2 - 6k + 8$ che si annulla per $k = 4$ e $k = 2$. Per valori di k diversi da 4 e 2 i tre vettori formano dunque una base per $\mathbb{R}^3$.

2 (b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}_3$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$?

$k = 2$

Motivazione:

Dalla domanda precedente sappiamo che per $k \neq 4$ e $k \neq 2$ i tre vettori sono linearmente indipendenti e, dunque, nessuno di loro è combinazione lineare dei rimanenti. In particolare $\mathbf{v}_3$ non è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
Se $k = 4$ il vettore $\mathbf{v}_2$ è multiplo di $\mathbf{v}_1$: dunque ogni combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è un multiplo di $\mathbf{v}_1$. Poiché $\mathbf{v}_3$ non è multiplo di $\mathbf{v}_1$, abbiamo che $\mathbf{v}_3$ non è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
Se $k = 2$ nessuno dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è multiplo dell'altro: dunque $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Aggiungendo a dei vettori linearmente indipendenti un vettore che non è loro combinazione lineare otteniamo dei vettori linearmente indipendenti. Se $\mathbf{v}_3$ non fosse combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ allora $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sarebbero linearmente indipendenti: poiché non è così, il vettore $\mathbf{v}_3$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

2. Siano dati i punti $A := (1, 2, 3, 1)$ e $B := (1, 3, 1, 0)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 8 = 0$ di $\mathbb{R}^4$.

2 (a) Determina un punto C sull'iperpiano π tale che A, B e C siano allineati.

$C := \left(1, \frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Motivazione:

La retta passante n per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (1-1)t \\ x_2 = 2 + (3-2)t \\ x_3 = 3 + (1-3)t \\ x_4 = 1 + (0-1)t \end{cases}$$

vale a dire

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = 1 - t \end{cases}$$

Intersecando tale retta con l'iperpiano π troviamo l'equazione risolvente

$$1 + 3(2+t) - (3-2t) + (1-t) - 8 = 0$$

vale a dire $4t - 3 = 0$, la cui soluzione è $t = \frac{3}{4}$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo il punto $\left(1, \frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

2 (b) Il punto C appartiene al segmento aperto di estremi A e B?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Nelle equazioni parametriche della retta passante per A e B usate al punto precedente, i punti del segmento aperto di estremi A e B si ottengono per valori del parametro compreso tra 0 e 1. Poiché C si ottiene per il parametro uguale a $\frac{3}{4}$, abbiamo che C appartiene al segmento di estremi A e B.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia data la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 := (2, 0, 2)$ e $\mathbf{v}_3 := (0, 2, 3)$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ il cui nucleo è generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e tale che $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2$.

2	

(a) Determina una base dell'immagine di f.

$(2, 0, 2)$

Motivazione:

Le immagini dei vettori di una base generano l'immagine: poiché $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ e $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2$, l'immagine di f è generata dal vettore $\mathbf{v}_2$, che, essendo non nullo, costituisce una base per l'immagine di f.

2	

(b) Determina la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Dobbiamo calcolare l'immagine di ciascun vettore della base e decomporla rispetto alla base stessa.
Sappiamo che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$: dunque $f(\mathbf{v}_1) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$. Riportiamo dunque sulla prima colonna della matrice i coefficienti 0, 0 e 0.
Analogamente $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$: dunque $f(\mathbf{v}_2) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$. Riportiamo dunque sulla seconda colonna della matrice i coefficienti 0, 0 e 0.
Infine sappiamo che $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2$: dunque $f(\mathbf{v}_3) = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$. Riportiamo dunque sulla prima colonna della matrice i coefficienti 0, 1 e 0.

3	

(c) Determina la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali $E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ed $F := \langle(1,0,0,1),(0,1,-1,0),(1,0,0,-1)\rangle$.

2 (a) Determina una base per la somma $E + F$.

$(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$

Motivazione:

Il sottospazio vettoriale E, essendo definito da una singola equazione non banale, ha dimensione $4 - 1 = 3$. Dunque $E + F$ ha almeno dimensione 3. Poiché $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 ciò significa che $E + F$ ha dimensione 3 o 4. Il primo caso si verifica se $E + F = E$, cioè se $F \subseteq E$, il secondo altrimenti. Sappiamo che F è generato da 3 vettori: se questi vettori appartengono tutti a E allora $F \subseteq E$, altrimenti no. Verifichiamo se il primo dei generatori di F appartiene a E:

$$1 + 0 - 0 + 2 \cdot 1 = 3 \neq 0.$$

Dunque $(1,0,0,1) \notin E$ e, pertanto, F non è contenuto in E (non è necessario verificare cosa avviene per gli altri generatori). Per quanto detto prima, $E+F$ ha dimensione 4: ma allora $E + F = \mathbb{R}^4$. Possiamo scegliere come base di $\mathbb{R}^4$ quella canonica.

2 (b) Determina una base dell'intersezione $E \cap F$.

$(4,0,0,-2)$ e $(2,1,-1,-2)$

Motivazione:

Il generico vettore di F si può scrivere così: $\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,-1,0) + \gamma(1,0,0,-1)$ vale a dire $(\alpha+\gamma, \beta, -\beta, \alpha-\gamma)$. Imponendo l'appartenenza a E otteniamo la condizione:

$$(\alpha + \gamma) + \beta - (-\beta) + 2(\alpha - \gamma) = 0$$

vale a dire $3\alpha + 2\beta - \gamma = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono del tipo $\gamma = 3\alpha + 2\beta$. Pertanto, il generico vettore dell'intersezione è del tipo: $(\alpha+(3\alpha+2\beta), \beta, -\beta, \alpha-(3\alpha+2\beta))$, cioè $(4\alpha + 2\beta, \beta, -\beta, -2\alpha - 2\beta)$. Posto prima $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e poi $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ troviamo una base per $E \cap F$ formata dai vettori $(4,0,0,-2)$ e $(2,1,-1,-2)$.

3 (c) Esiste un sottospazio H che sia supplementare in $\mathbb{R}^4$ al tempo stesso di E e di F? In caso affermativo scriverne una base.

☒ Una base per H è: $(0,1,0,0)$	☐ Non esiste un sottospazio H con le proprietà richieste.

Motivazione:

Abbiamo già osservato che E ha dimensione 3. Dunque i suoi supplementari hanno dimensione $4 - 1 = 3$. Per generare uno di tali supplementi basta prendere un vettore $\mathbf{v}$ che non appartiene a E: infatti, se G è il sottospazio che esso genera, si ha che G ha dimensione 1, che $E \cap G$ ha dimensione 0 (non può avere dimensione 1 perché altrimenti coinciderebbe con G e conterrebbe $\mathbf{v}$ e che $E + G$ ha, per la formula di Grassmann, dimensione $1 + 3 - 0 = 4$ e, pertanto, coincide con $\mathbb{R}^4$.

Anche F ha dimensione 3: infatti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha, come è facile verificare, rango 3 (il minore formato dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante non nullo). In maniera analoga a quanto visto per E, un vettore non appartenente a F genera un supplemento di F.

Dobbiamo allora trovare, se esiste, un vettore $\mathbf{v} := (a,b,c,d)$ che non appartiene né a E né a F. Il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene a E se $a + b - c + 2d \neq 0$; il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene a F se non è combinazione lineare dei vettori che formano una base di F, il che avviene se e solo se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & c \\ 1 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, cioè se e solo se $-2b + 2c = 0$.

Un esempio di un vettore che non appartiene né a E né a F è allora $(0,1,0,0)$).

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia data la retta $r : 2x + 3y - 4 = 0$ e la circonferenza $\gamma : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

2	

(a) Le rette s e t, parallele a r e tangenti a γ hanno equazioni cartesiane:

$s : 2x + 3y + 10 = 0 \qquad t : 2x + 3y - 16 = 0$

Motivazione:

Una retta è tangente a una circonferenza se e solo se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è uguale al raggio della circonferenza.
La circonferenza γ ha centro $C := (3, -1)$ e raggio $\sqrt{13}$.
La generica retta parallela a r ha equazione del tipo $2x + 3y + k$. Imponendo che la sua distanza dal punto C sia uguale a $\sqrt{13}$ otteniamo la condizione:

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + k|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \sqrt{13}$$

vale a dire $|3 + k| = 13$, le cui soluzioni, $k = 10$ e $k = -16$, danno le equazioni delle rette cercate.

2	

(b) Detto S il punto di tangenza tra s e γ e T il punto di tangenza tra t e γ, la retta n passante per S e T ha equazione cartesiana:

$3x - 2y - 11 = 0$

Motivazione:

Data una circonferenza e una retta tangente a essa, la retta ortogonale alla tangente e passante per il centro della circonferenza, incontra la tangente nel punto di tangenza.
Poiché le tangenti s e t sono parallele, la retta n passante per C e ortogonale a s è ortogonale anche a t. La retta n interseca allora s in S e t in T ed è, dunque, la retta cercata.
La generica retta ortogonale a s ha equazione cartesiana $3x - 2y + k = 0$. Imponendo il passaggio per C otteniamo la condizione $3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + k = 0$ la cui soluzione, $k = -11$ fornisce l'equazione della retta cercata.

3	

(c) Le circonferenze tangenti alle rette s, t e n hanno equazioni cartesiane:

$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 13 \qquad x^2 + (y - 1)^2 = 13$

Motivazione:

Il centro delle circonferenze cercate deve essere equidistante dalle tre rette.
Poiché le rette s e t sono parallele, il luogo dei punti equidistanti da s e t è una retta b parallela a esse. Poiché γ è tangente sia a s che a t, il suo centro C appartiene a b. La retta s ha parametri direttori $(3, -2)$, dunque b (che è parallela a s e passa per C) ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$. La distanza di un qualsiasi punto di b dalla retta s (e dalla retta t) è uguale alla distanza di C da s, che è uguale al raggio $\sqrt{13}$ di γ. Una circonferenza è dunque tangente sia a s che a t se e solo se il suo centro è del tipo $(3+3t, -1-2t)$ e il suo raggio è $\sqrt{13}$. Tale circonferenza è tangente anche a n se e solo se il suo centro dista $\sqrt{13}$ anche da tale retta: imponendo tale condizione otteniamo l'equazione

$$\frac{|3(3 + 3t) - 2(-1 - 2t) - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \sqrt{13}$$

vale a dire $|13t| = 13$, le cui soluzioni, $t = 1$ e $t = -1$, sostituite nelle equazioni parametriche di b danno i centri $(6, -3)$ e $(0, 1)$ delle circonferenze cercate.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

3	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione cartesiana:

$x + y + z + 1 = 0$

Motivazione:

Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane di s possiamo determinarne le equazioni parametriche: $s : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}$. Dunque s ha parametri direttori $(-3, 2, 1)$.
Il fascio di piani passanti per r ha equazione $\lambda(x - y - z + 1) + \mu(x + 2y + 2z + 1) = 0$, che possiamo riscrivere come $(\lambda + \mu)x + (-\lambda + 2\mu)y + (-\lambda + 2\mu)z + (\lambda + \mu) = 0$. Imponendo il parallelismo di questo piano con il vettore direttore di s troviamo la condizione

$$(\lambda + \mu) \cdot (-3) + (-\lambda + 2\mu) \cdot 2 + (-\lambda + 2\mu) \cdot 1 = 0$$

vale a dire $-6\lambda + 3\mu = 0$. Prendendo, ad esempio, $\lambda = 1$ e $\mu = 2$ troviamo l'equazione del piano $\pi : 3x + 3y + 3z + 3 = 0$ o, equivalentemente $\pi : x + y + z + 1 = 0$.

2	

(b) Il piano σ parallelo a r e s ed equidistante da essi ha equazione cartesiana:

$x + y + z - 1 = 0$

Motivazione:

Il piano σ è parallelo alle rette r e s. Anche il piano π, determinato al punto precedente, è parallelo alle rette r e s. Pertanto il piano σ è parallelo al piano π e ha, quindi, equazione del tipo $x + y + z + k = 0$.
Per calcolare la distanza di σ da r, dato che r e σ sono paralleli possiamo prendere un punto qualsiasi di r e calcolare la sua distanza da σ. Prendiamo, ad esempio, il punto $A := (-1, 0, 0)$. Otteniamo così $\frac{|-1+0+0+k|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{3}}$.
Analogamente la distanza di σ da s è uguale alla distanza da σ di un punto qualsiasi di s. Prendendo ad esempio $B := (1, 2, 0)$, otteniamo così $\frac{|1+2+0+k|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{3}}$.
Uguagliando le due espressioni ottenute troviamo l'equazione $\frac{|k-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{3}}$, vale a dire $|k - 1| = |k + 3|$. Essa è soddisfatta se e solo se $k - 1 = k + 3$ o $k - 1 = -(k + 3)$. La prima condizione non ha soluzioni, mentre la seconda dà la soluzione $k = -1$. Pertanto il piano σ ha equazione $x + y + z - 1 = 0$.

2	

(c) La proiezione ortogonale della retta r sul piano σ ha equazioni cartesiane:

$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Motivazione:

La proiezione cercata è la retta intersezione tra il piano σ e il piano contenente r e ortogonale al piano σ. Per determinare tale piano, consideriamo il fascio di piani passanti per la retta r: $(\lambda + \mu)x + (-\lambda + 2\mu)y + (-\lambda + 2\mu)z + (\lambda + \mu) = 0$. Imponendo l'ortogonalità con σ troviamo la condizione $(\lambda + \mu) \cdot 1 + (-\lambda + 2\mu) \cdot 1 + (-\lambda + 2\mu) \cdot 1 = 0$ vale a dire $-\lambda + 5\mu = 0$. Ponendo, ad esempio, $\lambda = 5$ e $\mu = 1$, troviamo l'equazione del piano cercato: $6x - 3y - 3z + 6 = 0$, o, equivalentemente, $2x - y - z + 2 = 0$. Intersecando questo piano con il piano σ troviamo le equazioni della retta cercata.