COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $C_t := (t, t+1)$ e $P := (1, 3)$. Sia γ_t la circonferenza di centro C_t e passante per P.

2 (a) Per quali valori di t la circonferenza γ_t ha raggio 5?

$t = -2$ e $t = 5$

Motivazione:

Il raggio di γ_t è dato dalla distanza del suo centro C_t dal suo punto P ed è quindi uguale a $\sqrt{(t-1)^2 + (t+1-3)^2} = \sqrt{2t^2 - 6t + 5}$. Imponendo che tale valore sia uguale a 5 otteniamo l'equazione $\sqrt{2t^2 - 6t + 5} = 5$ vale a dire $2t^2 - 6t - 20 = 0$ le cui soluzioni sono $t = -2$ e $t = 5$.

2 (b) Per quali valori di t la circonferenza γ_t è tangente all'asse y?

$t = 1$ e $t = 5$

Motivazione:

La circonferenza γ_t è tangente all'asse y se la distanza del suo centro C_t dall'asse y è uguale al raggio. La distanza del punto C_t dall'asse y è uguale a $|t|$. Uguagliando questa quantità al raggio della circonferenza, che abbiamo calcolato al punto precedente, otteniamo l'equazione $\sqrt{2t^2 - 6t + 5} = |t|$ vale a dire $t^2 - 6t + 5 = 0$ le cui soluzioni sono $t = 1$ e $t = 5$.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali E_h, generato dai vettori $\mathbf{v}_1 := (2,1,0)$ e $\mathbf{v}_2 := (0,2,h)$ e $F := \{(x,y,z) \mid x-y=0, y+z=0\}$.

2	

(a) Per quali valori di h i sottospazi E_h e F sono supplementari in $\mathbb{R}^3$?

$h \neq -4$

Motivazione:

I sottospazi E_h e F sono supplementari in $\mathbb{R}^3$ se e solo se $E_h + F = \mathbb{R}^3$ e $E_h \cap F = \{\mathbf{0}\}$.
Il sottospazio E_h è generato da 2 vettori che, qualunque sia h, non sono uno multiplo dell'altro. Pertanto $\dim E_h = 2$ per ogni h. Risolvendo il sistema lineare che definisce il sottospazio vettoriale F, vediamo che esso è formato dai vettori del tipo $(t,t,-t)$ al variare di t. Dunque F ha dimensione 1 e ha una base formata dal vettore $(1,1,-1)$.
La somma $E_h + F$ è generata allora dai vettori $(2,1,0)$, $(0,2,h)$ e $(1,1,-1)$. Questi vettori generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, cioè ha determinante diverso da 0. La matrice A ha determinante $-h-4$. Se $h=-4$ la somma $E_h + F$ ha dimensione minore di 3 e, quindi, i sottospazi E_h e F non sono supplementari in $\mathbb{R}^3$. Se $h \neq -4$ la somma $E_h + F$ coincide con $\mathbb{R}^3$, e, per la formula di Grassmann, si ha $\dim(E_h \cap F) = \dim E_h + \dim F - \dim(E+F) = 2+1-3 = 0$, da cui segue che anche la condizione $E_h \cap F = \{\mathbf{0}\}$ è soddisfatta per tali valori.

2	

(b) Per quali valori di h il vettore $\mathbf{v}_2$ è ortogonale a tutti i vettori di F?

$h = 2$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo già che i vettori di F sono i vettori del tipo $(t,t,-t)$ al variare di T in $\mathbb{R}$. Calcolando il prodotto scalare di un tale vettore generico con $\mathbf{v}_2$ otteniamo $t \cdot 0 + t \cdot 2 + (-t) \cdot h = t(2-h)$. Questo prodotto scalare si annulla per tutti i vettori di F, cioè per tutti i i valori di t, se e solo se $h = 2$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato il sistema nelle incognite x, y e z $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + ky + z = -1 \\ ky = 1 \end{cases}$ con k parametro reale.

2 (a) Determina i valori di k per cui il sistema ha esattamente una soluzione.

$k = -1$

Motivazione:

Un sistema ha un'unica soluzione se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno entrambe rango uguale al numero delle incognite (in questo caso 3). Consideriamo la matrice del sistema $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$. Il minore formato dalle prime due righe e prime due colonne è invertibile. I suoi orlati sono $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$: il primo ha determinante $1 - k^2$ che si annulla per $k = 1$ e $k = -1$; il secondo ha determinante $k - k^2$ che si annulla per $k = 0$ e $k = 1$. L'unico valore per cui si annullano entrambi è $k = 1$: pertanto per tale valore $\operatorname{rk} A = 2$, mentre per $k \neq 1$ si ha $\operatorname{rk} A = 3$. La matrice completa del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & 1 & -1 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $1 - k^2$ che si annulla per $k = 1$ e $k = -1$. Per k diverso da tali valori la matrice completa del sistema ha rango 4, mentre per tali valori ha rango minore di 4.
Riassumendo: per $k = 1$ la matrice del sistema ha rango diverso da 3, per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ la matrice completa del sistema ha rango diverso da 3, quindi in tali casi il sistema non ha un'unica soluzione. Per $k = -1$ la matrice del sistema ha rango 3 e la matrice completa del sistema ha rango minore di 4 (che, quindi, deve essere necessariamente essere 3). Pertanto per $k = -1$ il sistema ha un'unica soluzione.

2 (b) Determina i valori di k per cui $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ è soluzione del sistema.

Nessun valore

Motivazione:

Sostituendo i valori assegnati otteniamo $\begin{cases} 1 + (-1) = 0 \\ 1 + 1 + k(-1) = 1 \\ k + k + (-1) = -1 \\ k = 1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2 - k = 1 \\ -1 + 2k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$.
Non c'è alcun valore di k per cui tutte le equazioni sono soddisfatte.

3 (c) Determina i valori di k per cui il sistema è risolubile.

$k = -1$

Motivazione:

Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema è risolubile se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.
Dal punto a sappiamo già che per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ la matrice completa del sistema ha rango 4 che è diverso dal rango della matrice del sistema che può essere al massimo 3. Abbiamo già visto che per $k = -1$ il sistema è risolubile. Per $k = 1$ si vede immediatamente che la seconda e la terza equazione sono incompatibili.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina una base dell'immagine di f.

$(0, -1, -1, -1)$, $(0, 1, -1, 1)$

Motivazione:

Il minore B formato dalla seconda e terza riga e dalle prime due colonne è invertibile. Questo minore ha 4 orlati: i 2 che si ottengono utilizzando la prima riga di A hanno una riga nulla e hanno, pertanto, determinante nullo, gli altri 2 sono $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Svolgendo i calcoli si trova che anche questi hanno determinante nullo. Tutti gli orlati di B hanno, quindi, determinante nullo. Pertanto A ha rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime due colonne di A formano una base per l'immagine di f.

2

(b) Determina una base del nucleo di f.

$(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$
Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che quindi è sufficiente considerare due equazioni linearmente indipendenti. Possiamo prendere, ad esempio, la seconda e la terza e ottenere il sistema equivalente
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$
Trattando x_2 e x_4 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(h + k, h, h, k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.

3

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : 2x - 3y + 1 = 0$ e $s : x + 3y - 4 = 0$ e il punto $P \coloneqq (3, 2)$.

2	

(a) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette t passanti per P e tali che r, s e t formano un triangolo rettangolo.

$3x + 2y - 13 = 0 \qquad 3x - y - 7 = 0$

Motivazione:

Poiché $2 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \neq 0$ le rette r e s non sono ortogonali. Pertanto r, s e t formano un triangolo rettangolo se t è ortogonale a r o t è ortogonale a s.
La generica retta ortogonale a r ha equazione $3x + 2y + k = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo la condizione $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + k = 0$ da cui si ottiene $k = -13$. La retta ha dunque equazione $3x + 2y - 13 = 0$.
La generica retta ortogonale a s ha equazione $3x - y + h = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo la condizione $3 \cdot 3 - 2 + h = 0$ da cui si ottiene $h = -7$. La retta ha dunque equazione $3x - y - 7 = 0$.

2	

(b) Detto A il punto di intersezione tra le rette r e s determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette n passanti per P e tali che il segmento congiungente A e P sia un'altezza del triangolo delimitato da r, s e n.

$2x + y - 8 = 0$

Motivazione:

Il segmento congiungente A e P è un'altezza del triangolo se e solo se n è ortogonale alla retta passante per A e P. Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$ si trova il punto $A \coloneqq (1, 1)$ intersezione di r e s.
La retta passante per A e P ha parametri direttori $(3 - 1, 2 - 1) = (2, 1)$. La generica retta ortogonale al vettore $(2, 1)$ ha equazione cartesiana $2x + y + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P otteniamo la condizione $2 \cdot 3 + 2 + k = 0$ da cui otteniamo $k = -8$. La retta cercata ha allora equazione $2x + y - 8 = 0$.

3	

(c) Scelta una delle rette n trovate al punto precedente, determinare il sistema di disequazioni che definisce l'insieme dei punti interni al triangolo delimitato dalle rette r, s e n.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 > 0 \\ x + 3y - 4 > 0 \\ 2x + y - 8 < 0 \end{cases}$$

6. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (1,2,0,0)$, $B := (1,0,1,1)$, $C := (0,2,1,0)$ e $D := (1,3,1,1)$.

2

(a) L'iperpiano π passante per i punti A, B, C e D ha equazione cartesiana:

$-x_1 - x_3 + x_4 + 1 = 0$

Motivazione:

Il generico iperpiano ha equazione cartesiana $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e = 0$. Imponendo il passaggio per i punti assegnati troviamo il sistema $\begin{cases} a + 2b \qquad\qquad + e = 0 \\ a \qquad\quad + c + d + e = 0 \\ \qquad 2b + c \qquad + e = 0 \\ a + 3b + c + d + e = 0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono $(-h, 0, -h, h, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Prendendo un valore non nullo qualsiasi per h troviamo l'equazione $-x_1 - x_3 + x_4 + 1 = 0$.

2

(b) L'iperpiano σ parallelo a π e passante per l'origine ha equazione cartesiana:

$-x_1 - x_3 + x_4 = 0$

Motivazione:

Il generico iperpiano parallelo a π ha equazione cartesiana del tipo $-x_1 - x_3 + x_4 + h = 0$. Imponendo il passaggio per l'origine troviamo immediatamente $h = 0$.

3

(c) Stabilire se il punto $P := (0,0,0,1)$ appartiene alla fascia delimitata dagli iperpiani π e σ.

☐ Il punto P appartiene alla fascia delimitata da π e σ
☒ Il punto P non appartiene alla fascia delimitata da π e σ

Motivazione:

La fascia delimitata da π e σ è l'intersezione del semispazio delimitato da π e contenente σ con il semispazio delimitato da σ e contenente π.
I semispazi delimitati da π hanno disequazioni $-x_1 - x_3 + x_4 + 1 > 0$ e $-x_1 - x_3 + x_4 + 1 < 0$. Prendiamo un qualsiasi punto di σ, ad esempio l'origine: sostituendone le coordinate nel polinomio $-x_1 - x_3 + x_4 + 1$ troviamo $-0 - 0 + 0 + 1 = 1$; pertanto l'origine e, quindi, tutto l'iperpiano σ è contenuto nel semispazio $-x_1 - x_3 + x_4 + 1 > 0$. Sostituendo le coordinate di P nel polinomio $-x_1 - x_3 + x_4 + 1$ troviamo $-0 - 0 + 1 + 1 = 2$: pertanto P appartiene al semispazio delimitato da π e contenente σ.
I semispazi delimitati da σ hanno disequazioni $-x_1 - x_3 + x_4 > 0$ e $-x_1 - x_3 + x_4 < 0$. Prendiamo un qualsiasi punto di π, ad esempio A: sostituendone le coordinate nel polinomio $-x_1 - x_3 + x_4$ troviamo $-1 - 0 + 0 = -1$; pertanto il punto A e, quindi, tutto l'iperpiano π è contenuto nel semispazio $-x_1 - x_3 + x_4 < 0$. Sostituendo le coordinate di P nel polinomio $-x_1 - x_3 + x_4$ troviamo $-0 - 0 + 1 = 1$: pertanto P non appartiene al semispazio delimitato da σ e contenente π.
Poiché P non appartiene a entrambi i semispazi, il punto P non appartiene alla fascia delimitata da π e σ.