COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che ha 1 e -2 come autovalori.

| 2 | |

(a) È possibile calcolare la dimensione del nucleo di f?

☒ Sì, $\dim \ker f =$ 0 ☐ No, i dati non sono sufficienti

Motivazione:

Il nucleo di f contiene vettori non nulli se e solo se 0 è autovalore di f. Poiché un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ può avere al massimo due autovalori, 0 non è autovalore di f, e, quindi, il nucleo di f è formato dal solo vettore nullo.

| 2 | |

(b) È possibile calcolare il determinante della matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica?

☒ Sì, $\det A =$ -2 ☐ No, i dati non sono sufficienti

Motivazione:

La somma delle molteplicità degli autovalori di f non può superare la dimensione di $\mathbb{R}^2$, cioè 2. Dunque i due autovalori dati di f hanno ciascuno molteplicità 1. La somma delle molteplicità eguaglia la dimensione di $\mathbb{R}^2$: pertanto f è diagonalizzabile. Esiste dunque una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui f si rappresenta con la matrice $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, il cui determinante è -2. Poiché tutte le matrici rappresentative di un endomorfismo sono simili tra loro, esiste una matrice invertibile M tale che $A = M^{-}BM$. Per il teorema di Binet si ha allora $\det A = \det(M^{-1}) \det B \det M$. Poiché $\det M^{-1} \det M = 1$, si ha allora $\det A = \det B = -2$.

2. In $\mathbb{R}^5$ siano dati l'iperpiano $\Pi : x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1 = 0$ e i punti $A := (2, 3, 1, 0, 3)$ e $B := (1, 0, 2, 1, k)$.

2	

(a) Per quali valori di k la retta passante per A e B è ortogonale all'iperpiano Π?

Nessun valore di k

Motivazione:

Il vettore direttore della retta passante per i punti A e B è dato dalla differenza delle coordinate $(2-1, 3-0, 1-2, 0-1, 3-k) = (1, 3, -1, -1, 3-k)$ dei punti A e B. La direzione ortogonale al piano è individuata dal vettore $(1, 3, -1, 1, 2)$ che si ottiene dai coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di Π. Non c'è alcun valore di k per cui tali vettori sono paralleli fra loro, quindi la retta passante per A e B non è ortogonale all'iperpiano Π per alcun valore di k.

2	

(b) Per quali valori di k il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano Π?

$k < \frac{1}{2}$

Motivazione:

I due semispazi delimitati da Π sono definiti dalle disequazioni $x_1+3x_2-x_3+x_4+2x_5-1 > 0$ e $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1 < 0$.

Sostituendo le coordinate del punto A nel polinomio $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1$ otteniamo $2 + 3 \cdot 3 - 1 + 0 + 2 \cdot 3 - 1 = 15$. Il risultato è positivo, dunque A appartiene al semispazio $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1 > 0$.
Dunque, il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano se e solo se il punto B appartiene al semispazio $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1 < 0$.
Sostituendo le coordinate del punto B nel polinomio $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1$ otteniamo $1 + 3 \cdot 0 - 2 + 1 + 2 \cdot k - 1 = 2k - 1$.

Il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano Π se e solo se $2k - 1 < 0$ cioè se e solo se $k < \frac{1}{2}$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale $E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$.

2 (a) Determina una base per E.

$(1, 1, 2, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$

Motivazione:

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Considerando x_2 e x_4 come parametri otteniamo che ha soluzioni del tipo $(h, h, 2h + k, k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Posto prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo una base per E formata dai vettori $(1, 1, 2, 0)$ e $(0, 0, 1, 1)$.

2 (b) Determina una base ortonormale di E.

$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, -1, -3)$

Motivazione:

Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base trovata al punto precedente. Detti $\mathbf{v}_1 := (1, 1, 2, 0)$ e $\mathbf{v}_2 := (0, 0, 1, 1)$, poniamo $\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$. Calcolando il prodotto scalare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= ((1, 1, 2, 0) + \alpha(0, 0, 1, 1)) \times (1, 1, 2, 0) = \\ &= (1, 1, 2, 0) \times (1, 1, 2, 0) + \alpha(0, 0, 1, 1) \times (1, 1, 2, 0) = \\ &= 6 + 2\alpha. \end{aligned}$$

Scegliendo $\alpha = -3$ si ha $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque una base ortogonale per E è data dai vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2, 0) - 3(0, 0, 1, 1) = (1, 1, -1, -3)$. Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale di E.

3 (c) Determina una base per un sottospazio F supplementare di E in $\mathbb{R}^4$.

$(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$

Motivazione:

Consideriamo una base di E, ad esempio quella formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, e completiamola a una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo far ciò scegliendo in maniera opportuna 2 vettori da una base qualunque, ad esempio la base canonica. Dobbiamo innanzitutto scegliere un vettore che non sia combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, cioè che non appartenga a E. Il vettore $\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0, 0)$ non soddisfa le equazioni che definiscono E, quindi possiamo prendere questo vettore. Cerchiamo ora uno tra i rimanenti vettori della base canonica che non sia combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{e}_1$. Poiché la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 possiamo prendere il vettore $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, 0)$. Dunque $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ formano una base per $\mathbb{R}^4$. Il sottospazio che ha per base $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ è allora un supplementare di E.

4. Sia f_k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con $A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & k & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v} := (0, 1, 0)$.

2	

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di f?

$k = 0$

Motivazione:

Per determinare l'immagine di $\mathbf{v}$ tramite f_k consideriamo il prodotto: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & k & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$.
L'immagine dunque si annulla se e solo se $k = 0$.

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f?

$k \neq 0$

Motivazione:

La matrice A_k ha determinante $-k^2 - k$ che si annulla per $k = 0$ e $k = -1$. Per k diverso da tali valori f_k è un automorfismo: in particolare la sua immagine coincide con $\mathbb{R}^3$ e, dunque, contiene $\mathbf{v}$.
Per $k = 0$ la matrice si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La prima e terza colonna sono linearmente indipendenti, quindi forniscono le componenti rispetto alla base canonica di una base dell'immagine di f_0. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, che si trova prendendo tali colonne e la colonna delle componenti di $\mathbf{v}$, ha determinante diverso da 0: pertanto il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di f_0.
Per $k = -1$ la matrice si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La seconda colonna dà le coordinate dell'opposto di $\mathbf{v}$ che, dunque, appartiene all'immagine di f_{-1}.
Riassumendo $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f_k per tutti i valori diversi da 0.

3	

(c) Per quali valori di k l'intersezione tra il nucleo e l'immagine di f_k contiene vettori non nulli?

$k = -1$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, l'endomorfismo f_k è un automorfismo: in particolare $\ker f_k = \{\mathbf{0}\}$. A maggior ragione $\ker f_k \cap f_k(\mathbb{R}^3) = \{\mathbf{0}\}$.
Per $k = 0$, la matrice A_0 ha, come abbiamo osservato al punto precedente, rango 2. Pertanto $\dim \ker f_0 = 3 - 2 = 1$. Ma allora $\dim(\ker f_0 \cap f_0(\mathbb{R}^3))$ è 0 o 1. Se avesse dimensione diversa da 0, avremmo allora $\ker f_0 \cap f_0(\mathbb{R}^3) = \ker f_0$, cioè il nucleo dovrebbe essere contenuto nell'immagine. Dai punti precedenti sappiamo però che per $k = 0$ il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo ma non all'immagine: dunque il nucleo non è contenuto nell'immagine.
Per $k = -1$, risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A_{-1}: $\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, ricaviamo facilmente che il nucleo è generato dal vettore $(1, 0, 1)$. Le prime due colonne di A_{-1} sono linearmente indipendenti e, quindi, danno le componenti rispetto alla base canonica di una base per l'immagine di f_{-1}. Se ora consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ formata da queste due colonne e dalla colonna delle componenti di $(1, 0, 1)$ rispetto alla base canonica, otteniamo una matrice dal determinante nullo, e, pertanto, il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f_{-1}: dunque $\ker f_{-1} \cap f_{-1}(\mathbb{R}^3)$ contiene il vettore non nullo $(1, 0, 1)$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $P := (2, 4)$ e la retta $r : 2x - 3y - 5 = 0$.

| 2 | |

(a) La circonferenza γ di centro P e tangente a r ha equazione cartesiana:

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$

Motivazione:

Una retta è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. La distanza del punto P dalla retta r è uguale a

$$\frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}.$$

Dunque la circonferenza cercata ha equazione cartesiana è $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$.

| 2 | |

(b) Detto H il punto di tangenza tra γ e r, trovare l'equazione cartesiana della circonferenza δ, diversa da γ, avente lo stesso raggio di γ e tangente in H alla retta r.

$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 13$

Motivazione:

Poiché γ è tangente in H a r, la retta passante per P e H è ortogonale a r. Allo stesso modo, detto Q il centro di δ, la retta passante per Q e H è ortogonale a r. Pertanto i punti P, H, e Q sono allineati e giacciono su una retta ortogonale a r. Tale retta è la retta n passante per P e ortogonale a r. Le sue equazioni parametriche sono: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ x = 4 - 3t \end{cases}$. Imponendo che la distanza da r del punto generico $(2 + 2t, 4 - 3t)$ di n sia uguale alla distanza di P da r, cioè $\sqrt{13}$, otteniamo la condizione:

$$\frac{|2 \cdot (2 + 2t) - 3 \cdot (4 - 3t) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13},$$

vale a dire $|13t - 13| = 13$. Le soluzioni di questa equazione sono $t = 0$, che dà il punto P, e $t = 2$, che dà il punto $Q = (6, -2)$. Dunque la circonferenza δ ha equazione cartesiana $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 13$.

| 3 | |

(c) La circonferenza (non degenere, cioè con raggio diverso da 0) centrata in H e tangente sia alla circonferenza γ che alla circonferenza δ ha equazione cartesiana:

$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 52$

Motivazione:

Il punto H è dato dall'intersezione della retta r con la retta n utilizzata al punto precedente. Per trovare H risolviamo allora l'equazione $2 \cdot (2 + 2t) - 3 \cdot (4 - 3t) - 5 = 0$ cioè $13t - 13 = 0$ la cui soluzione $t = 1$, sostituita nelle equazioni parametriche di n, dà le coordinate del punto $H = (4, 1)$. Due circonferenze sono tangenti se e solo se la distanza fra i loro centri è uguale alla somma dei raggi (tangenza esterna) o al valore assoluto della differenza dei raggi (tangenza interna). Il punto H dista $\sqrt{13}$ sia dal centro di γ che dal centro di δ. Le circonferenze γ e δ hanno entrambe raggio $\sqrt{13}$. Dunque, detto r il raggio della circonferenza cercata, deve essere $r + \sqrt{13} = \sqrt{13}$ o $|r - \sqrt{13}| = \sqrt{13}$. Nel primo caso avremmo $r = 0$, nel secondo caso $r = 0$ o $r = 2\sqrt{13}$. Poiché stiamo cercando una circonferenza non degenere, deve essere $r = 2\sqrt{13}$: pertanto la circonferenza cercata ha equazione $(x-4)^2+(y-1)^2 = 52$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : \begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e i punti $A := (1, 3, 1)$ e $B := (2, 4, 1)$.

2	

(a) La retta s parallela a r e passante per A ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r è data come intersezione dei piani $\alpha : 3x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : x + y - z - 1 = 0$. Consideriamo il fascio di piani paralleli a α:

$$3x - y + z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo $3 \cdot 1 - 3 + 1 + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -1$. Il piano α' parallelo a α e passante per A ha allora equazione $3x - y + z - 1 = 0$.
Consideriamo ora il fascio di piani paralleli a β:

$$x + y - z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo $1 + 3 - 1 + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -3$. Il piano β' parallelo a β e passante per A ha allora equazione $x + y - z - 3 = 0$.
La retta s è l'intersezione di α' e β'.

3	

(b) Il piano π parallelo a r e passante per A e B ha equazione:

$x - y + z + 1 = 0$

Motivazione:

Il piano π, essendo parallelo a r, è parallelo anche a s. Poiché π contiene un punto di s, cioè A, il piano π contiene la retta s. Se ora consideriamo il fascio di piani passanti per s

$$\lambda(3x - y + z - 1) + \mu(x + y - z - 3) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per il punto B otteniamo la condizione

$$\lambda(3 \cdot 2 - 4 + 1 - 1) + \mu(2 + 4 - 1 - 3) = 0$$

vale a dire $2\lambda + 2\mu = 0$. Ponendo, ad esempio, $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ nell'equazione del fascio otteniamo il piano cercato, ovvero $\pi : 2x-2y+2z+2 = 0$ o, equivalentemente, $x-y+z+1 = 0$

2	

(c) La distanza tra il piano π e la retta r è:

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Motivazione:

Poiché la retta e il piano sono paralleli, la distanza tra essi è uguale alla distanza di un punto arbitrario sulla retta il piano. Prendiamo allora un punto su r, ad esempio $P := (1, 0, 0)$, e calcoliamo la sua distanza da π:

$$\mathrm{d}(r, \pi) = \mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|1 - 0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$