COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \left\{(x, y, z) \mid kx - 2y + 3z = k^2 - 1\right\}$$

2 (a) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

Per ogni k

Motivazione:

Qualunque sia k, l'equazione che definisce E_k è un'equazione lineare nelle incognite x, y, z. Qualunque sia k, almeno uno dei coefficienti è diverso da 0 (ad esempio, il coefficiente di y), dunque l'equazione ammette soluzioni.
L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare risolubile è sempre un sottospazio affine.

2 (b) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 1$ e $k = -1$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $k^2 - 1 = 0$.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati l'iperpiano $\Pi : 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2 = 0$ e i punti $A := (1, 2, 2, 0)$ e $B := (1, 0, 3, k)$.

2	

(a) Per quali valori di k i punti A e B stanno in semispazi opposti rispetto all'iperpiano Π?

$k < -9$

Motivazione:

I due semispazi delimitati da Π sono definiti dalle disequazioni $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2 > 0$ e $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2 < 0$.

Sostituendo le coordinate del punto A nel polinomio $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2$ otteniamo $2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 2 + 0 - 2 = 4$. Il risultato è positivo, dunque A appartiene al semispazio $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2 > 0$.
Sostituendo le coordinate del punto B nel polinomio $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2$ otteniamo $2 \cdot 1 - 0 + 3 \cdot 3 + k - 2 = k + 9$.
I punti A e B stanno in semispazi opposti rispetto all'iperpiano Π se e solo se $k + 9 < 0$ cioè se e solo se $k < -9$.

2	

(b) Per quali valori di k esiste un iperpiano parallelo a Π e contenente A e B?

$k = -5$

Motivazione:

Il generico iperpiano parallelo a π ha equazione del tipo $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + h = 0$. Imponendo il passaggio per A otteniamo $2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 2 + 0 + h = 0$ da cui otteniamo $h = -6$. L'iperpiano σ ha quindi equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 6 = 0$. Imponendo che B appartenga a tale iperpiano troviamo la condizione $2 \cdot 1 - 0 + 3 \cdot 3 + k - 6 = 0$ da cui ricaviamo $k = -5$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali U, generato dai vettori $\mathbf{u}_1 := (1, 2, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 := (1, 1, 1, 0)$ e V generato dai vettori $\mathbf{v}_1 := (0, 1, 3, 1)$ e $\mathbf{v}_2 := (3, 4, -2, 1)$.

3	

(a) Determina una base per $U \cap V$.

$(3, 5, 1, 2)$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ non sono multipli uno dell'altro, quindi formano una base per U e $\dim U = 2$. Analogamente $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formano una base per V e $\dim V = 2$.
Un vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $U \cap V$ se e solo se si può esprimere come combinazione lineare sia dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ che dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, cioè se e solo se esistono α, β, γ e δ tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha(1, 2, 0, 1) + \beta(1, 1, 1, 0) \\ \mathbf{v} &= \gamma(0, 1, 3, 1) + \delta(3, 4, -2, 1) \end{aligned}$$

Uguagliando componente per componente queste espressioni troviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3\delta \\ 2\alpha + \beta = \gamma + 4\delta \\ \beta = 3\gamma - 2\delta \\ \alpha = \gamma + \delta \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(2h, h, h, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Dunque $U \cap V$ ha dimensione 1 e, prendendo ad esempio $h = 1$, ha una base formata dal vettore $2 \cdot (1, 2, 0, 1) + 1 \cdot (1, 1, 1, 0) = (3, 5, 1, 2)$.

2	

(b) Determina una base di $U + V$.

$(1, 2, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 3, 1)$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $\dim U = \dim V = 2$ e $\dim(U \cap V) = 1$. Per la formula di Grassmann si ha allora $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3$.
I vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ generano $U + V$. Estraiamo da essi una base di $U + V$: i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ formano una base di U e sono quindi linearmente indipendenti. Se $\mathbf{v}_1$ fosse combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, dovrebbe appartenere a $U \cap V$: così non è perché non è multiplo del vettore che abbiamo trovato come risposta al punto precedente. Pertanto $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_1$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $U + V$.

2	

(c) Determina una base per un sottospazio supplementare di $U + V$ in $\mathbb{R}^4$.

$(1, 0, 0, 0)$

Motivazione:

Al punto precedente abbiamo trovato una base di $U + V$: completiamola a una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo far ciò scegliendo in maniera opportuna un vettore da una base qualunque, ad esempio la base canonica. Proviamo a uno a uno tali vettori finché ne troviamo uno che non sia combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_1$. Poiché $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 possiamo prendere il vettore $\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0, 0)$. Il sottospazio che ha per base $\mathbf{e}_1$ è allora un supplementare di $U + V$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina una base dell'immagine di f.

$(2,0,0,2)$, $(0,1,2,0)$

Motivazione:

Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti perché non sono una multipla dell'altra. La terza colonna è 2 volte la seconda e la quarta è uguale alla prima. Dunque le prime due colonne di A formano una base per lo spazio vettoriale generato dalle colonne. La matrice A ha, pertanto, rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime due colonne di A formano una base per l'immagine di f.

2

(b) Determina una base del nucleo di f.

$(0,-2,1,0)$, $(1,0,0,-1)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che quindi è sufficiente considerare due equazioni linearmente indipendenti. Possiamo prendere, ad esempio, le prime due e ottenere il sistema equivalente $\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$. Trattando x_1 e x_3 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(k,-2h,h,-k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h=1$ e $k=0$ e poi $h=0$ e $k=1$ troviamo i vettori $(0,-2,1,0)$ e $(1,0,0,-1)$.

3

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (2, 1)$, $B := (6, 4)$ e $C := (8, 2)$.

| 2 | |

(a) La retta passante per A e che divide il triangolo ABC in due parti di area uguale ha equazione cartesiana:

$2x - 5y + 1 = 0$

Motivazione:

Una retta passante per A divide il triangolo ABC in due parti se e solo se passa per un punto M del segmento BC. In tal modo si ottengono due triangoli ABM e ACM che, rispetto alle basi BM e CM che giacciono sulla retta s passante per B e C, hanno la stessa altezza, cioè la distanza di A da s. I due triangoli ABM e ACM hanno allora area uguale se e solo se le basi BM e CM hanno la stessa lunghezza, cioè se e solo se M è il punto medio di B e C. Il punto medio di B e C ha coordinate $\left(\frac{6+8}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (7, 3)$. La retta passante per A e M ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 7-2 & 3-1 \end{vmatrix} = 0$ cioè $2x - 5y + 1 = 0$.

| 2 | |

(b) Determina la disequazione del semipiano contenente C e delimitato dalla retta passante per A e B.

$3x - 4y - 2 > 0$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 6-2 & 4-1 \end{vmatrix} = 0$ cioè $3x - 4y - 2 = 0$. Sostituendo le coordinate di C nel polinomio $3x - 4y - 2$ otteniamo $3 \cdot 8 - 4 \cdot 2 - 2 = 14$: poiché tale numero è positivo, il semipiano cercato è definito dalla disequazione $3x - 4y - 2 > 0$.

| 3 | |

(c) Detto M il punto medio di B e C e detta r la retta passante per M e parallela alla retta passante per A e B, determinare il rapporto tra le aree delle due superfici in cui il triangolo ABC è diviso dalla retta r.

3

Motivazione:

La retta r interseca la retta passante per A e C in un punto N. I triangoli NMC e ABC sono simili: hanno infatti l'angolo in C uguale perché in comune e gli angoli $\widehat{NMC}$ e $\widehat{ABC}$ uguali perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele MN e AB tagliate dalla retta BC. Le aree di figure simili variano come il quadrato delle lunghezze di segmenti corrispondenti: poiché il lato MC è $\frac{1}{2}$ del lato corrispondente BC, ne segue che l'area del triangolo NMC è $\frac{1}{4}$ dell'area del triangolo ABC. Pertanto, la parte rimanente del triangolo ABC, cioè il quadrilatero $ABMN$, ha area uguale a $\frac{3}{4}$ dell'area di ABC. Il rapporto tra le aree delle due parti è allora 3.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il piano $\pi : 2x - y - 2z + 3 = 0$, la sfera $S : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ e il punto $A := (1, 0, 0)$.

2	

(a) I piani tangenti a S e paralleli a π hanno equazione cartesiana:

$2x - y - 2z + 18 = 0 \qquad 2x - y - 2z - 12 = 0$

Motivazione:

Il generico piano parallelo a π ha equazione $\pi : 2x - y - 2z + k = 0$. Imponendo che la distanza di questo generico piano dal centro $C := (2, 1, 3)$ della sfera sia uguale al raggio della sfera otteniamo l'equazione:

$$\frac{|2 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 5,$$

vale a dire $\frac{|k-3|}{3} = 5$, le cui soluzioni sono $k = 18$ e $k = -12$, che danno le equazioni dei piani cercati.

2	

(b) I piani paralleli a π che intersecano S in una circonferenza di raggio 3 hanno equazione cartesiana:

$2x - y - 2z + 15 = 0 \qquad 2x - y - 2z - 9 = 0$

Motivazione:

Un piano che interseca una sfera, la interseca in una circonferenza γ il cui centro H è la proiezione ortogonale sul piano del centro C della sfera. Detto allora P un punto qualsiasi della circonferenza γ, il triangolo CHP è un triangolo rettangolo in H. L'ipotenusa CP ha lunghezza uguale al raggio R della sfera, il cateto HP ha lunghezza uguale al raggio r della circonferenza e il cateto CH ha lunghezza uguale alla distanza d del piano dal centro della sfera. Dunque si ha, per il teorema di Pitagora, $R^2 = r^2 + d^2$.
Nel nostro caso sappiamo che $R = 5$ e $r = 3$: ricaviamo dunque $d = 4$. I piani cercati sono, pertanto, i piani paralleli a π la cui distanza dal centro C della sfera sia uguale a 4. Uguagliando a tale valore la distanza tra il piano generico parallelo a π e C trovata al punto precedente, otteniamo l'equazione $\frac{|k-3|}{3} = 4$, le cui soluzioni sono $k = 15$ e $k = -9$, che danno le equazioni dei piani cercati.

3	

(c) Il piano σ passante per A, ortogonale a π e che interseca S in una circonferenza di raggio massimo possibile ha equazione cartesiana:

$-x - 8y + 3z + 1 = 0$

Motivazione:

Un piano interseca una sfera in una circonferenza di raggio massimo se e solo se passa per il centro della sfera. Dato il piano generico di equazione $ax + by + cz + d = 0$, imponendo allora il passaggio per A, il passaggio per il centro C della sfera e l'ortogonalità con π troviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b+3c} + d = 0 \\ 2a + b + 3c + d = 0 \\ 2a - b - 2c \phantom{{}+d} = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono del tipo $(a, b, c, d) = (-h, -8h, 3h, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Scegliendo, ad esempio, $h = 1$ troviamo che l'equazione del piano cercato è $-x - 8y + 3z + 1 = 0$.