COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa $A$ rispetto alla base canonica soddisfa le condizioni: 1 è autovalore di $A$, 5 è autovalore di $A$ e $\det A = 0$.

2 (a) L'endomorfismo $f$ è diagonalizzabile?

☒ Sì ☐ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilirlo.

Motivazione:

Poiché la matrice $A$ non è invertibile, 0 è autovalore di $A$. Dunque la matrice $A$ ha almeno 3 autovalori: dal momento che la somma delle molteplicità degli autovalori non può eccedere 3, ciò significa che la matrice $A$ ha esattamente 3 autovalori semplici cioè di molteplicità 1). Pertanto $A$ è diagonalizzabile.

2 (b) Determina, se possibile, la dimensione dell'immagine di $f$.

☒ L'immagine di $f$ ha dimensione $\boxed{2}$ ☐ I dati assegnati non sono sufficienti.

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui $f$ si rappresenta con la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'immagine di $f$ ha dimensione uguale al rango di questa matrice, cioè 2.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ siano dati l'iperpiano $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0$ e i punti $A := (2, 1, 0, 3)$ e $B := (1, -1, k, 2k)$.

2

(a) Per quali valori di $k$ i punti $A$ e $B$ stanno su semispazi opposti rispetto a $\Pi$?

$k < 2$

Motivazione:

I due semispazi delimitati da $\Pi$ sono definiti dalle disequazioni $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 1 > 0$ e $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 1 < 0$.
Sostituendo le coordinate del punto $A$ nel polinomio $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 1$ otteniamo $2+2\cdot 1-0+3-1 = 6$. Il risultato è un numero positivo, dunque $A$ appartiene al semispazio $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 1 > 0$.
Sostituendo le coordinate del punto $B$ nel polinomio $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 1$ otteniamo $1 + 2 \cdot (-1) - k + 2k - 1 = k - 2$. Pertanto $B$ appartiene al semispazio opposto rispetto ad $A$ se e solo se $k - 2 < 0$ cioè se e solo se $k < 2$.

2

(b) Per quali valori di $k$ la retta passante per $A$ e $B$ è ortogonale all'iperpiano $\Pi$?

$k = 1$

Motivazione:

Il vettore direttore della retta passante per i punti $A$ e $B$ è dato dalla differenza delle coordinate $(2-1, 1-(-1), 0-k, 3-2k) = (1, 2, -k, 3-2k)$ dei punti $A$ e $B$. La direzione ortogonale al piano è individuata dal vettore $(1, 2, -1, 1)$ che si ottiene dai coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di $\Pi$. La retta passante per $A$ e $B$ è ortogonale all'iperpiano $\Pi$ se e solo se questi vettori sono proporzionali, il che avviene se e solo se $k = 1$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia data in $\mathbb{R}^3$ la base formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,3,1)$, $\mathbf{v}_2 := (1,0,1)$ e $\mathbf{v}_3 := (0,1,1)$. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

2

(a) Determina una base dell'immagine di $f$.

$(1,3,1)$

Motivazione:

L'immagine è generata dalle immagini dei vettori di una base. Dunque l'immagine di $f$ è generata da $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$ e $f(\mathbf{v}_3)$: tutte queste immagini coincidono con $(1,3,1)$, che dunque genera l'immagine di $f$. Essendo non nullo, tale vettore forma una base per l'immagine di $f$.

2

(b) Determina la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base formata dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Occorre calcolare le immagini dei vettori della base assegnata e decomporla rispetto alla base stessa. Si ha $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3$. Dunque sulla prima colonna della matrice abbiamo i coefficienti $(1,0,0)$. Poiché anche $f(\mathbf{v}_2)$ e $f(\mathbf{v}_3)$ coincidono con $\mathbf{v}_1$, sulla seconda colonna e terza colonna della matrice abbiamo i coefficienti $(1,0,0)$.

3

(c) Determina la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sia $U$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $(0,1,1,-1)$ e $(1,0,1,-1)$ e $V$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $(2,2,3,0)$ e $(0,0,1,-4)$.

2 (a) Determina una base per $U \cap V$.

$(2,2,4,-4)$

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{w}$ appartiene a $U \cap V$ se si può esprimere come combinazione lineare sia di $(0,1,1,-1)$ e $(1,0,1,-1)$ sia di $(2,2,3,0)$ e $(0,0,1,-4)$. Dunque:

$$\alpha(0,1,1,-1) + \beta(1,0,1,-1) = \gamma(2,2,3,0) + \delta(0,0,1,-4).$$

Questa relazione conduce al sistema $\begin{cases} \beta = 2\gamma \\ \alpha = 2\gamma \\ \alpha + \beta = 3\gamma + \delta \\ -\alpha - \beta = -4\delta \end{cases}$. Sostituendo ad $\alpha$ e $\beta$ nella terza e quarta equazione le espressioni in termini di $\gamma$ date dalla prima e seconda equazione otteniamo $\delta = \gamma$ e $-4\delta = -4\gamma$. Le equazioni così trovate sono ovviamente equivalenti, e possiamo così esprimere le soluzioni in termini di $\gamma$ nel modo seguente $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2t, 2t, t, t)$ al variare del parametro reale $t$. Il generico vettore di $U \cap V$ si può allora scrivere come $t(2,2,3,0) + t(0,0,1,-4)$, vale a dire $(2t, 2t, 4t, -4t)$. Scegliendo, ad esempio, $t = 1$ si trova un vettore che forma una base di $U \cap V$.

2 (b) Determina una base per $U + V$.

$(0,1,1,-1)$, $(1,0,1,-1)$, $(2,2,3,0)$

Motivazione:

Sia $U$ che $V$ sono generati da due vettori linearmente indipendenti e hanno quindi dimensione 2. Dal punto precedente sappiamo che $U \cap V$ ha dimensione 1. Per la formula di Grassmann, si ha allora $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3$. I vettori $(0,1,1,-1)$, $(1,0,1,-1)$, $(2,2,3,0)$ e $(0,0,1,-4)$ generano $U + V$: dobbiamo quindi trovare 3 vettori linearmente indipendenti tra questi. I primi 2 sono linearmente indipendenti perché formano una base per $U$: il terzo vettore (che appartiene a $V$) non è combinazione lineare dei primi 2 perché, se così fosse, apparterrebbe anche a $U$ e dovrebbe quindi essere multiplo di $(2,2,4,-4)$, vettore che genera $U \cap V$. Dunque i primi 3 vettori formano una base di $U + V$.

3 (c) Determina una base ortonormale di $U$.

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad$ $\left(-\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$

Motivazione:

Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base formata dai vettori $(0,1,1,-1)$ e $(1,0,1,-1)$. Detti $\mathbf{u}_1 := (0,1,1,-1)$ e $\mathbf{u}_2 := (1,0,1,-1)$, poniamo $\mathbf{v}_1 := \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{v}_2 := \mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2$. Calcolando il prodotto scalare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (0,1,1,-1) \times ((0,1,1,-1) + \alpha(1,0,1,-1)) = \\ &= (0,1,1,-1) \times (0,1,1,-1) + \alpha(0,1,1,-1) \times (1,0,1,-1) = \\ &= 3 + 2\alpha. \end{aligned}$$

Scegliendo $\alpha = -\frac{3}{2}$ si ha $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque una base ortogonale per $E$ è data dai vettori $\mathbf{u}_1 = (0,1,1,-1)$ e $\mathbf{u}_2 = (0,1,1,-1) - \frac{3}{2}(1,0,1,-1) = \left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale di $E$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano date la retta $r : 3x + 4y + 12 = 0$ e la circonferenza $\gamma : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determina l'equazione della circonferenza $\delta$ concentrica a $\gamma$ e tangente la retta $r$.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$

Motivazione:

Una circonferenza è tangente a una retta se e solo se la distanza del suo centro dalla retta è uguale al raggio. Il centro di $\gamma$ (e, quindi, di $\delta$) è il punto $C := (2, 3)$ la cui distanza da $r$ è $\frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$. La circonferenza $\delta$ ha, dunque, raggio 6 e la sua equazione è $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$.

| 3 | |
|---|---|

(b) Detto $H$ il punto di tangenza tra $\delta$ e $r$ determina l'equazione della circonferenza tangente la retta $r$ in $H$ e tangente esternamente $\gamma$.

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

Motivazione:

Una retta tangente una circonferenza è ortogonale al raggio congiungente il centro con il punto di tangenza. Detta allora $n$ la retta passante per il centro $C$ di $\delta$ (e di $\gamma$), si ha che il punto di tangenza $H$ e il centro $D$ della circonferenza cercata appartengono a $n$. Poiché sia il centro di $\gamma$ che il centro $D$ appartengono a $n$, anche il punto di tangenza $K$ tra le due circonferenze appartiene a $n$. Poiché $K$, $H$ e $D$ sono allineati, il segmento $KH$ è un diametro della circonferenza cercata (si noti che $K$ e $H$ non possono coincidere perché altrimenti $\gamma$ passerebbe per $H$ e sarebbe quindi tangente $r$). Il punto $K$, inoltre, giace sul segmento $CH$. Dal momento che dal punto precedente sappiamo che la distanza di $C$ da $H$ è uguale a 6 e che la distanza di $C$ da $K$ è uguale a 4, cioè il raggio di $\gamma$, ne consegue che la distanza di $H$ da $K$ è uguale a $6 - 4 = 2$. Dunque, il raggio della circonferenza cercata è uguale a 1 e il suo centro $D$ è il punto di $n$ distante $4 + 1 = 5$ da $C$ e distante 1 da $r$. La retta $n$ ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$. Il punto generico $(2 + 3t, 3 + 4t)$ di questa retta ha allora distanza da $C$ uguale a $\sqrt{(2 + 3t - 2)^2 + (3 + 4t - 3)^2} = 5|t|$. Questa distanza è uguale a 5 per $t = 1$ e $t = -1$, corrispondenti ai punti $(5, 7)$ e $(-1, -1)$. Le loro distanze rispettive da $r$ sono $\frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 11$ e $\frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) + 12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1$. Il punto $D$ è dunque il secondo e la circonferenza cercata ha equazione $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

| 2 | |
|---|---|

(c) Determina l'equazione della circonferenza concentrica a $\gamma$ e che interseca la retta $r$ in due punti $A$ e $B$ distanti tra loro 4.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 40$

Motivazione:

Detta $H$ la proiezione ortogonale di $C$ sulla retta $r$, si ha che $H$ è il punto medio di $A$ e $B$. Dunque, $ACH$ è un triangolo rettangolo in $H$ il cui cateto $AH$ ha lunghezza uguale alla metà della distanza di $A$ da $B$, cioè 2. Il cateto $CH$ ha invece lunghezza uguale alla distanza di $C$ da $r$, che abbiamo calcolato al punto $A$ ed è 6. Dal teorema di Pitagora, otteniamo allora che l'ipotenusa $CA$ ha lunghezza uguale a $\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$. Questo è dunque il raggio della circonferenza cercata, la cui equazione è, pertanto:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (2,1,2)$ e la retta
$r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - z - 2 = 0 \end{cases}$

| 2 | |
|---|---|

(a) Il piano $\pi$ ortogonale a $r$ e passante per il punto $A$ ha equazione:

$x + y + 4z - 11 = 0$

Motivazione:

La retta $r$ è ortogonale ai vettori $(1,-1,0)$ e $(4,0,-1)$. Dunque, se $(m,n,p)$ sono parametri direttori di $r$, si ha $m - n = 0$ e $m - 4p = 0$. Si possono scegliere allora $(1,1,4)$ come parametri direttori di $r$. Un generico piano ortogonale a $r$ ha allora equazione del tipo $x+y+4z+d=0$. Imponendo il passaggio per $A$ otteniamo la condizione $2+1+4\cdot 2+d=0$ da cui otteniamo $d=-11$.

| 2 | |
|---|---|

(b) La distanza tra il punto $A$ e la retta $r$ è:

$\sqrt{2}$

Motivazione:

La distanza tra $A$ e $r$ è uguale alla distanza tra $A$ e la sua proiezione $H$ su $r$. Il punto $H$ è l'intersezione di $r$ con $\pi$. Dunque $H$ si trova risolvendo il sistema:
$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - z - 2 = 0 \\ x + y + 4z - 11 = 0 \end{cases}$ Risolvendo questo sistema troviamo $H = (1,2,2)$. La distanza tra $A$ e $H$ è $\sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{2}$.

| 3 | |
|---|---|

(c) Determina due punti $B$ e $C$ sulla retta $r$ in modo tale che $ABC$ sia un triangolo isoscele rettangolo in $A$:

$\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Motivazione:

Un triangolo isoscele $ABC$ rettangolo in $A$ ha i cateti $AB$ e $AC$ uguali fra loro e l'altezza $AH$ relativa all'ipotenusa $BC$ che è anche mediana. Inoltre l'altezza $AH$ è metà dell'ipotenusa $BC$: pertanto $BH$ e $CH$ sono uguali. Al punto precedente abbiamo già determinato il punto $H$, proiezione ortogonale di $A$ sulla retta $r$. Dobbiamo pertanto trovare i due punti $B$ e $C$ di $r$ la cui distanza da $H$ è uguale alla distanza di $A$ da $H$ calcolata al punto precedente, cioè $\sqrt{2}$. Dal punto a sappiamo che la retta $r$ ha parametri direttori $(1,1,4)$ e che passa per $H = (1,2,2)$, quindi possiamo scriverne le equazioni parametriche così:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + 4t \end{cases}.$$

Il punto generico di $r$ è allora $(1+t, 2+t, 2+4t)$ la cui distanza da $H$ è $\sqrt{(1+t-1)^2 + (2+t-2)^2 + (2+4t-2)^2} = \sqrt{18t^2} = 3\sqrt{2}|t|$. Imponendo che tale distanza sia uguale a $\sqrt{2}$ otteniamo $3\sqrt{2}|t| = \sqrt{2}$ da cui ricaviamo $t = \frac{1}{3}$ e $t = -\frac{1}{3}$che sostituiti nelle equazioni parametriche di $r$ danno i punti $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$.