COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia E il sottospazio generato da due vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ linearmente indipendenti e sia F il sottospazio generato da due vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ linearmente indipendenti.

2 (a) È vero che se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ allora E e F sono supplementari in V?

☒ Sì ☐ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilirlo.

Motivazione:

Per ipotesi la somma di E con F è diretta. Sia E che F hanno dimensione 2, essendo generati da coppie di vettori linearmente indipendenti. Per la formula di Grassmann si ha allora $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 0 = 4$. Pertanto $E + F = V$. Dunque V è la somma diretta di E con F, cioè E e F sono supplementari in V.

2 (b) È vero che se $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ non appartengono a E allora E e F sono supplementari in V?

☐ Sì, sempre ☐ No, mai ☒ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilirlo.

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $E \cap F = \mathbf{0}$ è equivalente a dire che i sottospazi sono supplementari in V. La condizione che $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ non appartengano a E è compatibile sia con $E \cap F = \mathbf{0}$ sia con $E \cap F \neq \mathbf{0}$, come mostrano i seguenti esempi.
Sia $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ una base di V.
Se scegliamo $\mathbf{e}_1 := \mathbf{v}_1$, $\mathbf{e}_2 := \mathbf{v}_2$, $\mathbf{f}_1 := \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{f}_2 := \mathbf{v}_4$ vediamo allora che il sottospazio E generato da $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e il sottospazio F generato $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ hanno intersezione ridotta al solo vettore nullo.
Se scegliamo $\mathbf{e}_1 := \mathbf{v}_1$, $\mathbf{e}_2 := \mathbf{v}_2$, $\mathbf{f}_1 := \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{f}_2 := \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ vediamo allora che il sottospazio E generato da $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e il sottospazio F generato $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ hanno intersezione non nulla perché $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 \in E$ ma né $\mathbf{f}_1$ né $\mathbf{f}_2$ appartengono a E.

2. Siano dati i punti $A := (0, 2, 1, 1, 1)$ e $B := (2, 1, 1, 1, 0)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + k = 0$ di $\mathbb{R}^5$.

2	

(a) Per quali valori di k il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π?

$-5 < k < -1$

Motivazione:

Il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π se e solo A e B stanno in semispazi delimitati da π diversi.
I due semispazi delimitati da π sono definiti dalle disequazioni $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + k > 0$ e $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + k < 0$. Sostituendo le coordinate di A in $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + k$ otteniamo $0 - 2 + 3 \cdot 1 + 1 - 1 + k = k + 1$. Sostituendo le coordinate di B otteniamo $2 - 1 + 3 \cdot 1 + 1 - 0 + k = k + 5$.
Affinché i due punti stiano in semispazi opposti i valori $k + 1$ e $k + 5$ devono essere discordi. Poiché $k + 5 > k + 1$ ciò avviene quando $k + 5 > 0$ e $k + 1 < 0$, cioè per $-5 < k < -1$.

2	

(b) Per quali valori di k la semiretta di origine A e contenente B interseca l'iperpiano π?

$k < -1$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + (2-0)t \\ x_2 = 2 + (1-2)t \\ x_3 = 1 + (1-1)t \\ x_4 = 1 + (1-1)t \\ x_5 = 1 + (0-1)t \end{cases}$$

I punti della semiretta di origine A e contenente B sono quelli corrispondenti ai valori positivi del parametro t.
Intersecando la retta r con l'iperpiano π si ottiene l'equazione $2t - (2-t) + 3 \cdot 1 + 1 - (1-t) + k = 0$ cioè $4t + 1 + k = 0$ la cui soluzione è $t = -\frac{1+k}{4}$. Questo è un valore positivo se e solo se $k < -1$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (3, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} := (0, 1, 3, 0)$ e sia F il sottospazio vettoriale così definito $F := \{(x, y, z, w) \mid x - y - z = 0, y - z = 0\}$.

2 (a) Determina una base per $E \cap F$.

$(6, 3, 3, 2)$

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{z}$ appartiene a E se e solo se si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cioè se si ha per qualche valore di α e β:

$$\mathbf{z} = \alpha(3, 1, 0, 1) + \beta(0, 1, 3, 0) = (3\alpha, \alpha + \beta, 3\beta, \alpha).$$

Imponendo che $\mathbf{z}$ appartenga a F troviamo le condizioni $3\alpha - (\alpha+\beta) - 3\beta = 0$ e $\alpha + \beta - 3\beta = 0$ vale a dire il sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}.$$

Chiaramente questo sistema ha soluzioni del tipo $\alpha = 2\beta$. I vettori di $E \cap F$ sono allora i vettori del tipo $(3 \cdot 2\beta, 2\beta + \beta, 3\beta, 2\beta) = (6\beta, 3\beta, 3\beta, 2\beta)$. Scegliendo, ad esempio, $\beta = 1$ si trova un vettore che forma una base di $E \cap F$.

2 (b) Determina una base per $E + F$.

$(3, 1, 0, 1)$, $(0, 1, 3, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$

Motivazione:

Cerchiamo innanzitutto dei generatori di $E + F$ da cui poi estrarremo una base. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ generano E: poiché sono linearmente indipendenti essi sono una base per E, che ha, dunque, dimensione 2. Risolvendo il sistema che definisce F troviamo che una base per F è formata, ad esempio, dai vettori $\mathbf{e} := (2, 1, 1, 0)$ e $\mathbf{f} := (0, 0, 0, 1)$. Dunque anche F ha dimensione 2. Dal punto precedente sappiamo che $\dim(E \cap F) = 1$. Per la formula di Grassmann, si ha $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3$. Cerchiamo ora una base per $E + F$. I vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{e}$ e $\mathbf{f}$ generano $E + F$: dobbiamo sceglierne tra essi 3 linearmente indipendenti. Poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti basta aggiungere a essi uno tra i vettori $\mathbf{e}$ o $\mathbf{f}$ che non sia loro combinazione lineare. Notiamo subito che, ad esempio, $\mathbf{e}$ non è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ perché, se così fosse, dovrebbe appartenere all'intersezione $E \cap F$ ed essere multiplo del vettore $(6, 3, 3, 2)$ che forma una base di $E \cap F$. Pertanto $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{e}$ formano una base di $E + F$.

3 (c) Determina una base ortonormale di F.

$(0, 0, 0, 1)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 (a) Determina una base del nucleo di f.

$(-1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A: $\begin{cases} -x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$. La seconda e quarta equazione sono multiple della prima, mentre la prima e terza equazione sono linearmente indipendenti. Il sistema è quindi equivalente al sistema formato dalla prima e terza equazione $\begin{cases} -x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$. Trattando x_3 e x_4 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(-h, 0, h, k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $(-1, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

2 (b) Determina gli autovalori di A con le rispettive molteplicità.

0 e 2, entrambi di molteplicità 2.

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^2(x-2)^2$.

3 (c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (5, 5)$ e la retta $r : 3x + 4y - 20 = 0$.

2	

(a) Determina le equazioni parametriche dell'asse del segmento AB.

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

Motivazione:

L'asse è la retta passante per il punto medio del segmento e ortogonale al segmento stesso. Il punto medio di A e B è il punto $M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (4, 3)$. Il vettore direttore della retta passante per A e B è $(5-3, 5-1) = (2, 4)$. Un vettore ortogonale a questo è $(2, -1)$, quindi l'asse ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

2	

(b) Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti A e B e avente centro sulla retta r.

$x^2 + (y - 5)^2 = 25$

Motivazione:

Il centro di una circonferenza passante per i punti A e B appartiene all'asse del segmento AB trovato al punto precedente, dunque il centro deve essere del tipo $(4+2t, 3-t)$. Imponendo che tale punto appartenga alla retta r troviamo l'equazione $3(4 + 2t) + 4(3 - t) - 20 = 0$ cioè $2t + 4 = 0$ la cui soluzione $t = -2$, sostituita nelle equazioni parametriche dell'asse del segmento AB dà le coordinate $(0, 5)$ del centro della circonferenza. La distanza di questo punto da A è uguale a $\sqrt{(0-3)^2 + (5-1)^2} = 5$ ed è il raggio della circonferenza cercata, che ha quindi equazione $x^2 + (y - 5)^2 = 25$.

3	

(c) Detto C il centro della circonferenza trovata al punto precedente, determina l'area del triangolo ABC.

10

Motivazione:

Il punto C giace sull'asse del segmento AB, quindi, prendendo come base del triangolo tale segmento, l'altezza relativa ad esso è il segmento congiungente C con il punto medio M di A e B. La distanza di A da B è $\sqrt{(5-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. La distanza di M da C è $\sqrt{(0-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. L'area è dunque $\frac{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano date le rette $r : \begin{cases} x + 3y + 2z + 2 = 0 \\ x - \ \ y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = 1 + \ \ t \\ y = 2 + \ \ t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

2	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

$3x + y - 2z - 4 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si può scrivere come: $\lambda(x+3y+2z+2)+\mu(x-y-2z-3) = 0$ ovvero $(\lambda + \mu)x + (3\lambda - \mu)y + (2\lambda - 2\mu)z + 2\lambda - 3\mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, 1, 2)$, otteniamo la relazione $(\lambda + \mu) \cdot 1 + (3\lambda - \mu) \cdot 1 + (2\lambda - 2\mu) \cdot 2 = 0$, vale a dire $8\lambda - 4\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 1$ e $\mu = 2$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2	

(b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

$3x + y - 2z - 3 = 0$

Motivazione:

Il piano cercato è parallelo sia a r sia a s e, dunque, è parallelo al piano π, e ha, pertanto, equazione del tipo $3x + y - 2z + k = 0$. Per imporre che il piano contenga la retta s è allora sufficiente imporre che contenga un punto di s, ad esempio, il punto $(1, 2, 1)$, ottenendo la condizione $3 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + k = 0$, da cui troviamo $k = -3$.

3	

(c) La proiezione ortogonale della retta r sul piano σ ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 3x + \ \ \ \ y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + 10y + 8z + 9 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La proiezione cercata è la retta intersezione tra il piano σ e il piano contenente r e ortogonale al piano σ. Per determinare tale piano, consideriamo il fascio di piani passanti per la retta r: $(\lambda+\mu)x+(3\lambda-\mu)y+(2\lambda-2\mu)z+2\lambda-3\mu = 0$. Imponendo l'ortogonalità con σ troviamo la condizione $(\lambda+\mu)\cdot 3+(3\lambda-\mu)\cdot 1+(2\lambda-2\mu)\cdot(-2) = 0$ vale a dire $2\lambda+6\mu = 0$. Ponendo, ad esempio, $\lambda = 3$ e $\mu = -1$, troviamo l'equazione del piano cercato: $2x + 10y + 8z + 9 = 0$. Intersecando questo piano con il piano σ troviamo le equazioni della retta cercata.