COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $A := (1,2,3,4)$, $B := (2,2,3,4)$, $C := (2,2,4,4)$, $D := (1,2,4,4)$ e $E := (2,2,4,k)$ con k parametro reale.

2 (a) Per quali valori di k i punti A, B , C , D e E sono allineati?

Nessun valore

Motivazione:

I punti A, B , C , D e E sono allineati se e solo se i vettori $B - A$, $C - A$, $D - A$ e $E - A$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1. La matrice avente come colonne le coordinate dei quattro vettori è: $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix}$. Il suo minore N formato dalla prima e dalla terza riga e dalle prime due colonne è invertibile. La matrice M ha quindi rango maggiore o uguale a 2. Pertanto i punti assegnati non sono mai allineati.

2 (b) Per quali valori di k i punti A, B, C , D e E sono complanari?

$k = 4$

Motivazione:

I punti A, B , C , D e E sono complanari se e solo se i vettori $B-A$, $C-A$, $D-A$ e $E-A$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 2 e quindi se e solo se la matrice M vista precedentemente ha rango minore o uguale a 2. Consideriamo i minori orlati del minore N visto precedentemente. Se orliamo N con la seconda riga otteniamo minori non invertibili perché essi hanno una riga nulla. Orlando N con la quarta riga otteniamo i minori $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix}$. Il primo ha determinante nullo, il secondo ha determinante uguale a $k - 4$ e quindi 4 è l'unico valore per cui i punti sono complanari.

2. Siano dati uno spazio vettoriale V avente come base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e uno spazio vettoriale W avente come base $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$. Sia $f : V \to W$ un omomorfismo.

2	

(a) L'omomorfismo f è suriettivo?

☐ Sì, l'omomorfismo f è sempre suriettivo.
☐ No, l'omomorfismo f non è mai suriettivo.
☒ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo

Motivazione:

I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo. Per dimostrare ciò diamo un esempio di un omomorfismo non suriettivo e un esempio di un omomorfismo suriettivo.
Sia f l'omomorfismo nullo. Quindi si ha che l'immagine è formata dal solo vettore nullo e quindi non coincide con W. Ne segue che l'omomorfismo non è suriettivo.
Consideriamo ora l'omomorfismo f tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_2$. Segue che $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ è una base di $f(V)$ e quindi $f(V) = W$. Pertanto l'omomorfismo f è suriettivo.

2	

(b) L'omomorfismo f è iniettivo?

☐ Sì, l'omomorfismo f è sempre iniettivo.
☒ No, l'omomorfismo f non è mai iniettivo.
☐ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo.

Motivazione:

Sappiamo che un omomorfismo f è iniettivo se e solo se $\dim \ker f = 0$.
Si ha $\dim V = \dim f(V) + \dim \ker f$. Ma $\dim f(V) \leq \dim W = 2 < \dim V$. Quindi $\dim \ker f > 0$. Ne segue che l'omomorfismo f non è iniettivo.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Siano dati uno spazio vettoriale E avente come base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.
Sia V il sottospazio vettoriale di E avente come base $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
Sia W il sottospazio vettoriale di E avente come base $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$

| 2 | |

(a) Determinare una base di $V + W$.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori delle basi di V e W relativamente alla base assegnata in E:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che si ha $\operatorname{rk} A = 2$. Pertanto $\dim(V + W) = 2$.
Da ciò segue $V + W = V = W$. Quindi come base di $V + W$ possiamo prendere la base assegnata di V.

| 2 | |

(b) Determina una base di $V \cap W$.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$

Motivazione:

Abbiamo visto nel punto precedente che $V = W$. Quindi $V \cap W = V$. Quindi come base di $V \cap W$ possiamo prendere la base assegnata di V.

| 3 | |

(c) Determinare un sottospazio vettoriale Fdi E tale che $\dim F = 2$ e $\dim(V \cap F) = 1$

F sottospazio vettoriale di base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{e}_1$

Motivazione:

Per far ciò consideriamo il sottospazio F avente come base un vettore di V e un vettore non appartenente a V. Prendiamo, per esempio, i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{e}_1$. Il vettore $\mathbf{e}_1$ è linearmente indipendente dai vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dal momento che la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango uguale a 3.
Segue che $\dim(V + F) = 3$. Applicando allora la formula di Grassmann si ha

$$\dim(V \cap F) = \dim V + \dim F - \dim(V + F) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ k & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con k parametro reale. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica.

2	

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ appartiene a $f(\mathbb{R}^3)$?

Per qualsiasi valore di k

Motivazione:

Per qualsiasi valore di k la matrice A ha determinante non nullo. Pertanto l'endomorfismo f è suriettivo e quindi il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine.

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è autovettore di f?

Per nessun valore di k

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si nota che si ha: $f(\mathbf{v}) = (1, 4, 2) \neq x(0, 1, 1)$ per ogni valore di x.
Quindi il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ non è mai autovettore di f.

3	

(c) Per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile?

Per $k = 0$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è uguale a $(3 - x)^2(2 - x)$ qualunque sia k. Gli autovalori sono, dunque, 3 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1. Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione degli autospazi.
L'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 1 per ogni valore di k dal momento che la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 è uguale a 1.
Si ha poi $\dim E(3) = 3 - \operatorname{rk}(A - 3 \cdot I)$ dove $A - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Abbiamo $\operatorname{rk}(A - 3 \cdot I) = 1$ per $k = 0$ e $\operatorname{rk}(A - 3 \cdot I) = 2$ per $k \neq 0$ e quindi $\dim E(3) = 2$ per $k = 0$ e $\dim E(3) = 1$ per $k \neq 0$.
Pertanto solo per $k = 0$ la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale a 3 e quindi solo per $k = 0$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il punto $A := (2, 3)$ e la retta $r : x - 3y + 4 = 0$.

| 2 | |

(a) Determinare l'equazione cartesiana della retta s simmetrica della retta r rispetto al punto A.

$s : x - 3y + 10 = 0$

Motivazione:

Dati due punti distinti B e C della retta r, la retta s è la retta passante per i punti B' e C' simmetrici rispetto al punto A dei punti B e C rispettivamente. Consideriamo allora il punto $B := (-4, 0)$ e il punto $C := (-1, 1)$. Il punto B' è quindi il punto tale che il punto A è il punto medio di B e B'. Pertanto le coordinate (x, y) di B' sono tali che $2 = \frac{-4+x}{2}$ e $3 = \frac{0+y}{2}$. Segue $B' = (8, 6)$. In modo analogo si trova $C' = (5, 5)$. La retta s passante per B' e C' ha equazione $s : x - 3y + 10 = 0$.

| 2 | |

(b) Determinare la distanza tra le rette r e s.

$\frac{6}{\sqrt{10}}$

Motivazione:

Osservando le equazioni delle due rette notiamo che le due rette sono parallele. La loro distanza è quindi uguale alla distanza di un qualsiasi punto P' di s dalla retta r. Prendiamo $P' = B'$. Abbiamo

$$d(B', r) = \frac{|8 - 3 \cdot 6 + 4|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

| 3 | |

(c) Esistono circonferenze che siano tangenti sia alla retta r che alla retta s?
Nel caso in cui esistano, determinare un'equazione di una tale circonferenza. Nel caso in cui non esistano spiegare perché non esistono.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{10}$

Motivazione:

Il centro di una tale circonferenza dovrà essere un punto equidistante dalle due rette. Esistono infiniti punti di questo tipo. Uno di essi è il punto A.
Infatti si ha: $d(A, r) = \frac{|2-3\cdot3+4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e $d(A, s) = \frac{|2-3\cdot3+10|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
Il raggio della circonferenza di centro A tangente alle due rette è pertanto uguale a $\frac{3}{\sqrt{10}}$.
La circonferenza ha quindi equazione:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{10}.$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $A := (3, 1, 2)$ e il piano $\pi : x + y + 2z - 8 = 0$ passante per A.

2	

(a) Verificare se la retta r passante per A e per il punto $B = (4, 0, 2)$ interseca o è contenuta nel piano π.

La retta r è contenuta nel piano π.

Motivazione:

Inserendo le coordinate del punto B nell'equazione del piano π otteniamo $4+0+2\cdot 2-8 = 0$. Quindi il punto B appartiene al piano π. Pertanto la retta r, poiché passa per due punti distinti di π, è contenuta in π.

3	

(b) Determinare la retta passante per il punto A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

$$\begin{cases} x + y + 2z - 8 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

Consideriamo il piano α passante per A e perpendicolare alla retta r.
Per determinarne una sua equazione consideriamo i parametri direttori della retta r. Essi sono dati dalle differenze delle coordinate dei punti A e B: $(4 - 3, 0 - 1, 2 - 2) = (1, -1, 0)$.
Pertanto il piano α ha equazione $(x - 3) - 1(y - 1) = 0$, cioè $x - y - 2 = 0$.
La retta s intersezione del piano π e del piano α passa per il punto A (poiché entrambi i piani passano per A) ed è contenuta ovviamente in π. Inoltre la retta r, essendo perpendicolare al piano α, è perpendicolare ad ogni retta del piano α passante per il punto $A = r \cap \alpha$ e quindi in particolare le rette r e s sono perpendicolari.
La retta s è quindi la retta cercata.

2	

(c) Calcolare la distanza del punto B dalla retta s determinata nel punto precedente.

$\mathrm{d}(B, s) = \sqrt{2}$

Motivazione:

Per determinare la distanza possiamo considerare la retta r' passante per B incidente e perpendicolare alla retta s, determinare $H = r' \cap s$ e calcolare la distanza tra B e H.
Ma, per costruzione, $r' = r$ e quindi $H = A$.
Abbiamo allora $\mathrm{d}(B, s) = \mathrm{d}(B, A) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{2}$.