

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Sia V il sottospazio di E avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$.

2

(a) Determinare un sottospazio W di E che abbia dimensione uguale a 2 e tale che il sottospazio $V \cap W$ sia di dimensione massima.

W avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Motivazione:

Poiché $\dim W < \dim V$, per avere $V \cap W$ di dimensione massima, si deve avere $W \subset V$. Pertanto possiamo considerare il sottospazio W di V avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

2

(b) Determinare un sottospazio W' di E che abbia dimensione uguale a 2 e tale che il sottospazio $V \cap W'$ sia di dimensione minima.

W' avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$.

Motivazione:

Per la formula di Grassmann si ha:
 $\dim(V \cap W') = \dim V + \dim W' - \dim(V + W') = 2 + 3 - \dim(V + W')$.
Da ciò segue che, affinché $V \cap W'$ abbia dimensione minima, $V + W'$ deve avere dimensione massima. Si deve quindi avere $V + W' = E$.
Consideriamo allora il sottospazio W' avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$. Dal momento che $V + W'$ è generato dai vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3$ e che questi ultimi generano E , il sottospazio W' verifica le condizioni richieste.

2. Siano dati i punti $A := (1, 2, -1, 1)$ e $B := (-1, -2, 1, -1)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ di \mathbb{R}^4 .

- 2 (a) Stabilire se la retta r passante per i punti A e B è ortogonale all'iperpiano π .

Sì, la retta r è ortogonale all'iperpiano π .

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v} = (-1 - 1, -2 - 2, 1 - (-1), -1 - 1) = (-2, -4, 2, -2)$ è multiplo del vettore $\mathbf{w} = (1, 2, -1, 1)$, le cui coordinate sono i coefficienti delle variabili dell'equazione dell'iperpiano π . Dal momento che \mathbf{w} è ortogonale a π , abbiamo che la retta r è ortogonale all'iperpiano π .

- 2 (b) Stabilire se il segmento AB interseca l'iperpiano π .

Sì, il segmento AB interseca l'iperpiano π .

Motivazione:

La retta r per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2 - 4t \\ x_3 = -1 + 2t \\ x_4 = 1 - 2t \end{cases}$$

Il punto di intersezione tra la retta r e l'iperpiano π si ottiene per $t = \frac{1}{2}$ e quindi appartiene al segmento AB .

Si sarebbe potuto arrivare alla stessa conclusione osservando che, sostituendo le coordinate dei punti A e B nell'equazione dell'iperpiano, si ottengono rispettivamente i numeri 7 e -7 . Essendo tali numeri di segno opposto si ha che i due punti appartengono a semispazi differenti delimitati dall'iperpiano e quindi il segmento che li ha come estremi interseca l'iperpiano in un punto.

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Si consideri, al variare del parametro reale k , il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} kx + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ (k+1)x + (k+1)y + (k+1)z = 2 \end{cases}$$

3

(a) Determinare tutti i valori k per i quali il sistema ha soluzioni.

$$k \neq -1$$

Motivazione:

La terza equazione è somma delle prime due equazioni. Pertanto il sistema è equivalente al sistema formato dalle prime due equazioni.

La matrice dei coefficienti del nuovo sistema ha la terza colonna uguale alla prima, pertanto il suo rango è uguale al rango della matrice B formata dalle prime due colonne. Si ha $\det B = k^2 - 1$ pertanto per $k \neq 1, k \neq -1$ si ha $rkB = 2$, mentre per $k = 1, k = -1$ si ha $rkB = 1$. Dal momento che la matrice completa del sistema non può avere rango maggiore di 2, abbiamo che per $k \neq 1, k \neq -1$ il sistema ha soluzioni.

Per $k = 1$ le due equazioni coincidono e quindi il sistema ha soluzioni. Per $k = -1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

che chiaramente non ha alcuna soluzione.

2

(b) Determinare tutte le eventuali soluzioni per $k = 2$.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t_1 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = t_1 \end{cases} \quad \text{al variare di } t_1 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Motivazione:

Il sistema formato dalle prime due equazioni diventa: $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Sottraendo alla prima equazione la seconda moltiplicata per 2 otteniamo:

$$\begin{cases} -3y = -1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = 1 - \frac{2}{3} - z \end{cases}$$

Segue che le soluzioni sono date da $\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t_1 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = t_1 \end{cases}$ al variare di t_1 in \mathbb{R} .

2

(c) Determinare tutte le eventuali soluzioni per $k = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

al variare di t_1 e t_2 in \mathbb{R} .

4. Sia $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali. Si consideri l'endomorfismo f di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ che associa ad ogni matrice la sua trasposta.

2

- (a) Determinare la matrice A associata ad f relativamente alla base canonica di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Sia B_1, B_2, B_3, B_4 la base canonica di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$.
 Dal momento che si ha: ${}^tB_1 = B_1, {}^tB_2 = B_3, {}^tB_3 = B_2, {}^tB_4 = B_4$, la matrice associata a f relativamente alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

- (b) Determinare una base per ciascun autospazio di f . Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
1	$B_1, B_4, B_2 + B_3$
-1	$B_2 - B_3$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è uguale a $p(x) = \det(A - xI) = (1 - x)^3(1 + x)$. Pertanto abbiamo l'autovalore 1 con molteplicità 3 e l'autovalore -1 con molteplicità 1.

Da ciò segue $\dim E(1) \leq 3$ e $\dim E(-1) = 1$.

Poiché ${}^tB_1 = B_1$, ${}^tB_4 = B_4$ e ${}^t(B_2 + B_3) = B_3 + B_2 = B_2 + B_3$ si ha che $B_1, B_4, B_2 + B_3$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 e quindi, essendo linearmente indipendenti, formano una base di $E(1)$.

Inoltre si ha ${}^t(B_2 - B_3) = B_3 - B_2 = -(B_2 - B_3)$ e quindi $B_2 - B_3$ è una base per $E(-1)$.

2

- (c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (\frac{5}{2}, 3)$, $C := (-\frac{1}{2}, -1)$.

2

(a) Determinare le equazioni parametriche dell'asse r del segmento AC .

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

Motivazione:

L'asse è la retta passante per il punto medio del segmento e ortogonale al segmento stesso. Il punto medio di A e C è il punto $M = (1, 1)$. Il vettore direttore della retta passante per A e C è $(\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}), 3 - (-1)) = (3, 4)$. Un vettore ortogonale a questo è $(-4, 3)$, quindi l'asse ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

4

(b) Determinare due punti B e D appartenenti alla retta r , simmetrici rispetto alla retta passante per A e C , tali che il quadrilatero di vertici consecutivi A, B, C e D abbia area uguale a 25.

$$B = (-3, 4) \text{ e } D = (5, -2)$$

Motivazione:

$\text{Area}(ABCD) = 4 \text{Area}(AMB) = 4 \frac{1}{2} d(A, M) d(M, B)$. Si ha $d(A, M) = \frac{5}{2}$. Pertanto si deve avere:
 $25 = 4 \frac{1}{2} \frac{5}{2} d(M, B)$; da cui segue che si deve avere $d(M, B) = 5$. Un punto generico dell'asse di AC ha coordinate $(1 - 4t, 1 + 3t)$. Imponendo che la sua distanza da M sia uguale a 5, otteniamo $t = \pm 1$. Pertanto $B = (-3, 4)$ e $D = (5, -2)$.

1

(c) Calcolare il perimetro del quadrilatero $ABCD$.

$$10\sqrt{5}$$

Motivazione:

Per il teorema di Pitagora abbiamo $d(A, B) = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + 5^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$. Pertanto il perimetro è uguale a $4 d(A, B) = 10\sqrt{5}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, si consideri il piano $\pi : x + 2y + 3z = 1$, il punto $A := (2, -2, 1)$ e il punto $B := (1, 0, 3)$.

2

(a) Stabilire se la retta r passante per A e B è perpendicolare al piano π .

La retta r non è perpendicolare al piano π .

Motivazione

I parametri direttori della retta r sono $(1 - 2, 0 - (-2), 3 - 1) = (-1, 2, 2)$.
 Poiché la terna $(-1, 2, 2)$ non è proporzionale alla terna $(1, 2, 3)$ data dai coefficienti delle variabili nell'equazione del piano π , si ha che la retta r non è perpendicolare al piano π .

3

(b) Quante sono le rette passanti per A , contenute in π e perpendicolari a r ? Determinare equazioni parametriche di una di esse.

Esiste una sola retta s verificante le condizioni assegnate.

$$s : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2 - 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

Motivazione:

Sostituendo le coordinate del punto A nell'equazione di π otteniamo: $2 + 2(-2) + 3 \cdot 1 = 1$. Pertanto il punto A appartiene al piano π . Le rette cercate devono passare per A e essere perpendicolari a r , pertanto appartengono al piano α passante per A e perpendicolare a r . Le rette cercate devono appartenere anche al piano π , quindi appartengono all'intersezione del piano α con il piano π . Dal momento che il piano π non è perpendicolare alla retta r , si ha che i piani π e α non coincidono. Poiché entrambi passano per A , si intersecano quindi in una retta, che chiamiamo s .

Per determinare tale retta potremmo considerare l'equazione del piano α e porla a sistema con l'equazione del piano π . Ma, dal momento che ne vogliamo equazioni parametriche, usiamo un altro metodo.

Una generica retta s passante per A ha equazioni parametriche:
$$\begin{cases} x = 2 + l \cdot t \\ y = -2 + m \cdot t \\ z = 1 + n \cdot t \end{cases}$$

Imponendo che la retta sia contenuta in π e che sia perpendicolare a r otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 \cdot l + 2 \cdot m + 3 \cdot n = 0 \\ -1 \cdot l + 2 \cdot m + 2 \cdot n = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come soluzioni} \quad \begin{cases} l = -\frac{1}{2}k \\ m = -\frac{5}{4}k \\ n = k \end{cases}$$

Ponendo $k = 4$ otteniamo equazioni parametriche della retta s .

2

(c) Determinare un punto C sulla retta s tale che il triangolo ABC abbia area uguale a $\sqrt{5}$.

$$C = \left(\frac{14}{9}, -\frac{28}{9}, \frac{17}{9}\right)$$

Motivazione:

Affinché il triangolo ABC , che è rettangolo in A , abbia area uguale a $\sqrt{5}$, si deve avere $\frac{1}{2} d(B, A) d(C, A) = \sqrt{5}$. Essendo $d(B, A) = 3$, si deve avere $d(C, A) = \frac{2}{3}\sqrt{5}$. Il punto P generico della retta s ha coordinate $(2 - 2t, -2 - 5t, 1 + 4t)$. Imponendo $d(C, A) = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ si ottiene $t = \pm \frac{2}{9}$. Prendendo $t = \frac{2}{9}$ si ottiene $C = \left(\frac{14}{9}, -\frac{28}{9}, \frac{17}{9}\right)$.