COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $A := (1, 0, 1, 0)$, $B := (1, -1, 0, 0)$, $C := (2, 1, 1, 0)$ e $D := (2, 0, 0, k)$.

2 (a) Per quali valori di k esiste un piano che contiene i punti A, B, C e D?

$k = 0$

Motivazione:

La dimensione dell'inviluppo affine dei punti A, B, C e D è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale generato dai vettori $B - A = (0, -1, -1, 0)$, $C - A = (1, 1, 0, 0)$ e $D - A = (1, 0, -1, k)$. La dimensione di tale sottospazio è uguale al rango della matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Il minore formato dalle prime due righe e due colonne ha determinante non nullo. I suoi orlati sono $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ che hanno rispettivamente determinante 0 e k. L'unico valore per cui tali minori hanno entrambi determinante nullo è $k = 0$. Dunque la matrice M ha rango 2 se $k = 0$ e rango 3 se $k \neq 0$. Pertanto per $k = 0$ l'inviluppo affine dei punti A, B, C e D ha dimensione 2: dunque tali punti sono contenuti in un piano. Invece per $k \neq 0$ l'inviluppo affine dei punti A, B, C e D ha dimensione 3: pertanto tali punti non sono contenuti in un piano.

2 (b) Per quali valori di k esiste un iperpiano che contiene i punti A, B, C e D?

Ogni valore

Motivazione:

L'inviluppo affine di 4 punti qualsiasi ha dimensione al massimo 3: poiché gli iperpiani di $\mathbb{R}^4$ sono proprio i sottospazi affini di dimensione 3, esiste sempre un iperpiano che li contiene.

2. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V e sia a un autovalore di f.

1 (a) Dare la definizione di autospazio $E(a)$ di f relativo all'autovalore a.

L'autospazio $E(a)$ è il sottoinsieme di V formato dagli autovettori di f relativi all'autovalore a e dal vettore nullo, vale a dire $E(a) := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = a\mathbf{v}\}$.

1 (b) Dimostrare che $E(a)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Ovviamente $E(a)$ è non vuoto perché, per definizione, contiene il vettore nullo. Dobbiamo mostrare che se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono vettori di $E(a)$ allora anche la loro somma appartiene a $E(a)$. Sappiamo cioè che $f(\mathbf{v}_1) = a\mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_2$ e dobbiamo mostrare che $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Infatti:

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che se $\mathbf{v}$ è un vettore di $E(a)$ e k è uno scalare allora anche il prodotto $k\mathbf{v}$ appartiene a $E(a)$. Sappiamo cioè che $f(\mathbf{v}) = a\mathbf{v}$ e dobbiamo mostrare che $f(k\mathbf{v}) = a(k\mathbf{v})$. Infatti:

$$f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) = ka\mathbf{v} = ak\mathbf{v}.$$

1 (c) Siano B e B' matrici associate a f relativamente a basi differenti di V. Dimostrare che B e B' hanno lo stesso rango.

Il rango di entrambe le matrici è uguale alla dimensione di $f(V)$, e quindi $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(B')$.

1 (d) Dimostrare che le matrici B e B' definite in (c) hanno lo stesso determinante.

Sia M la matrice di passaggio tra le due basi, essa è invertibile M e si ha $B' = M^{-1}BM$. Per il Teorema di Binet si ha allora

$$\det B' = \det\left(M^{-1}\right)\det B \det M.$$

Poiché $\det\left(M^{-1}\right)\det M = 1$, otteniamo $\det B' = \det B$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$W := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$$

2

(a) Determinare una base di W.

$(-1, 0, 1, 0), (3, 1, 0, 1)$

Motivazione:

Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$.
Sottraendo la prima equazione sia alla seconda equazione che alla terza, otteniamo: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$. Possiamo chiaramente eliminare la terza equazione. Ponendo $x_3 = h$ e $x_4 = k$ otteniamo tutte le soluzioni del nostro sistema: $(3k - h, k, h, k)$. Ponendo prima $h = 1, k = 0$ e poi $h = 0, k = 1$, otteniamo una base di W.

3

(b) Determinare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$.

$\dim U \cap W = 1$	$\dim U + W = 4$

Motivazione:

Poiché U è definito da un'unica equazione non banale, la sua dimensione è uguale a $\dim \mathbb{R}^4 - 1 = 4 - 1 = 3$.
Poiché il primo vettore della base di W trovata sopra non appartiene a U dal momento che le sue coordinate non verificano la condizione che caratterizza U, abbiamo $\dim(U + W) > 3$. Da ciò segue che si ha $\dim(U + W) = 4$ dal momento che $U + W \subset \mathbb{R}^4$. E quindi, per la formula di Grassmann, si ha $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$.

2

(c) Determinare una base ortonormale di W.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{26}}(3, 2, 3, 2)$

Nota: applicando l'algoritmo del Gram-Schmidt ai vettori $(3, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0)$ si sarebbe ottenuto come base ortonormale: $\frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{143}}(-2, 3, 11, 3)$.

4. Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ associato alla seguente matrice A relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2

(a) Determinare una base del nucleo di f.

$(2, 0, -1)$

Motivazione:

Osserviamo che la terza colonna della matrice A è il doppio della prima e quindi il rango della matrice A è al massimo uguale a 2. D'altronde il minore della matrice A formato dalle prime due righe e due colonne è invertibile. Pertanto il rango della matrice A è uguale a 2. Da ciò segue $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$ e $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim f(\mathbb{R}^3) = 3 - 2 = 1$.
Cerchiamo quindi un vettore non nullo appartenente al nucleo.
Dal momento che la terza colonna di A è il doppio della prima colonna di A abbiamo che $f(2, 0, -1) = 0$. Quindi il vettore $(2, 0, -1)$ è una base di $\ker f$.

3

(b) Determinare la matrice rappresentativa dell'omomorfismo f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 := (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 := (1, 0, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$.

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo appena visto che $\mathbf{v_1} \in \ker \mathbf{f}$. La prima colonna della matrice A' è quindi formata da tutti 0.
Si ha poi $f(\mathbf{v}_2) = f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3$.
I coefficienti di questo vettore relativi alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$ formano la seconda colonna della matrice A.
Si ha poi che il $\mathbf{v_3}$ è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Ne segue che la terza colonna della matrice A' coincide con la prima colonna della matrice A.

3

(c) Determinare $f^{-1}\left(1 + 2x + 3x^2 + 2x^3\right)$.

$f^{-1}\left(1 + 2x + 3x^2 + 2x^3\right) = (1, 1, 0) + \ker f = \{(1 + 2t, 1, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati i tre punti $P := (3, 4)$, $Q := (2, 1)$ e $R_k := (k, 0)$, con k parametro reale.

| 3 | |

(a) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste una circonferenza passante per P, Q e R_k.

$k \neq \frac{5}{3}$

Motivazione:

Per ogni valore di k i tre punti sono distinti perché hanno ordinata diversa. Per tre punti distinti non allineati passa una ed una sola circonferenza. Se i tre punti sono allineati, per essi non passa alcuna circonferenza.
I punti P, Q e R_k non sono allineati se e solo se i vettori $(3, 4)-(2, 1) = (1, 3)$ e $(k, 0)-(2, 1) = (k - 2, -1)$ sono linearmente indipendenti. Ciò avviene se e solo se $k \neq \frac{5}{3}$.

| 2 | |

(b) Determinare il valore di k per cui il triangolo PQR_k è rettangolo in Q.

$k = 5$

Motivazione:

Il triangolo PQR_k è rettangolo in Q se e solo se la retta r passante per P e Q è ortogonale alla retta s passante per Q e R_k. La retta r è parallela al vettore $(3, 4) - (2, 1) = (1, 3)$, mentre la retta s è parallela al vettore $(k, 0) - (2, 1) = (k - 2, -1)$. La retta r e s sono ortogonali se e solo questi due vettori sono ortogonali cioè se e solo se il loro prodotto scalare $(1, 3) \times (k - 2, -1) = k - 5$ si annulla, il che avviene se e solo se $k = 5$.

Nel resto dell'esercizio utilizzare il valore di k determinato al punto (b) (PQR_k rettangolo in Q).

| 2 | |

(c) Determinare il centro C della circonferenza γ passante per i punti P, Q e R_k

$C = (4, 2)$

Motivazione:

Poiché PQR_k è rettangolo in Q, il centro C di γ è il punto medio tra P e R_k.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (1, 4, 2)$ e il piano $\pi : x - y + z - 5 = 0$.

| 2 | |

(a) La sfera S di centro P e tangente il piano π ha equazione:

$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 12$

Motivazione:

Una sfera è tangente a un piano se e solo se la distanza del suo centro dal piano è uguale al raggio. La distanza di P da π è:

$$\frac{|1 - 4 + 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3}.$$

Dunque l'equazione della sfera è: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 12$.

| 2 | |

(b) Sia σ il piano parallelo a π e passante per P. La sfera T che ha il centro su π e che è tangente in P a σ ha equazione:

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 12$

Motivazione:

Il piano tangente a una sfera in un suo punto è ortogonale al raggio passante per tale punto. Dunque il centro D della sfera cercata T appartiene alla retta n ortogonale a σ e passante per P. Poiché σ è parallelo a π, la retta n è la retta ortogonale a π passante per P, cioè è la retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Il centro D appartiene a questa retta e al piano π: in altri termini è la proiezione ortogonale di C su π. Intersecando n e π troviamo l'equazione $(1 + t) - (4 - t) + (2 + t) - 5 = 0$, vale a dire $3t - 6 = 0$ la cui soluzione, $t = 2$, sostituita nelle equazioni parametriche della retta n fornisce le coordinate $(3, 2, 4)$ del centro D della sfera T. La sfera T ha raggio uguale alla distanza tra D e P: poiché D è la proiezione ortogonale di P su π tale distanza è uguale alla distanza di P da π, che avevamo calcolato al punto precedente ed è uguale a $2\sqrt{3}$. Dunque la sfera T ha equazione $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 12$.

| 3 | |

(c) Determinare il raggio della circonferenza γ intersezione di S e T:

3

Motivazione:

Le due sfere hanno lo stesso raggio e sono quindi l'una simmetrica dell'altra rispetto al piano asse dei loro centri, vale a dire il piano passante per il punto medio M di P e D e ortogonale alla retta passante per P e D. La circonferenza γ giace dunque su questo piano e ha centro M. Se ora prendiamo un qualsiasi punto A di γ, il triangolo APM è rettangolo in M. L'ipotenusa PA ha lunghezza uguale al raggio della sfera S, cioè $2\sqrt{3}$, il cateto PM ha lunghezza uguale alla metà della distanza di P da D, cioè $\sqrt{3}$. Per il teorema di Pitagora il cateto MA (che ha lunghezza uguale al raggio di γ) ha allora lunghezza uguale a $\sqrt{12 - 3} = 3$.