COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ vettori che formano una base di uno spazio vettoriale V.

2 (a) Quanti endomorfismi di V esistono tali che $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$ ed il nucleo di f sia generato da $\mathbf{v}_1 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$?

Nessuno

Motivazione:

Poiché $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti, il nucleo di f dovrebbe avere dimensione 2 e dunque l'immagine di f dovrebbe avere dimensione $3 - 2 = 1$: ma l'immagine di f contiene almeno i vettori linearmente indipendenti $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ e, dunque, non può avere dimensione inferiore a 2.

2 (b) Quanti endomorfismi di V esistono tali che $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$ ed il nucleo di f sia generato da $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$?

Uno

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ appartiene al nucleo se e solo se $f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$ cioè se e solo se $f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3)$. Dunque abbiamo le condizioni $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$ e $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$. Queste condizioni definiscono le immagini dei vettori di una base e, quindi, definiscono un unico endomorfismo f. Inoltre, per quanto detto sopra, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ appartiene al nucleo di f. Per verificare che il nucleo sia esattamente il sottospazio generato da $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ e non un sottospazio più grande calcoliamo la dimensione del nucleo di f. Poiché l'immagine di f è generata da $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ e $f(\mathbf{e}_3)$, cioè da $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$, abbiamo che l'immagine ha dimensione 2 e, dunque, il nucleo ha dimensione $3-2 = 1$. Pertanto il nucleo è il sottospazio generato da $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ e l'endomorfismo f soddisfa le condizioni assegnate.

2. Siano dati i punti $A := (1, 0, 1, 0)$, $B := (5, 4, 1, 4)$ e $C := (k, 1, 1, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ con k parametro reale.

| 2 | |

(a) Per quali valori di k il punto C appartiene al segmento aperto di estremi A e B?

$k = 2$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (5-1)t \\ x_2 = 0 + (4-0)t \\ x_3 = 1 + (1-1)t \\ x_4 = 0 + (4-0)t \end{cases}$$

ed i punti del segmento aperto di estremi A e B si ottengono per valori di t compresi tra 0 e 1. Imponendo che il punto C appartenga alla retta passante per A e B otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} k = 1 + 4t \\ 1 = \quad\;\; 4t \\ 1 = 1 \\ 1 = \quad\;\; 4t \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova $t = \frac{1}{4}$ e $k = 2$. Poiché il valore di t è compreso tra 0 e 1 per $k = 2$ il punto appartiene al segmento aperto di estremi A e B.

| 2 | |

(b) Per quali valori di k esiste un unico iperpiano che passa per i punti A, B, C e l'origine O?

$k \neq 2$

Motivazione:

Esiste un unico iperpiano (cioè un sottospazio affine di dimensione 3) che contiene i punti assegnati se e solo se non esiste un piano (cioè un sottospazio affine di dimensione 2) che li contiene.
Facendo le differenze delle coordinate di A e O, delle differenze delle coordinate di B e O, e delle coordinate di C e O otteniamo i vettori $(1, 0, 1, 0)$, $(5, 4, 1, 4)$ e $(k, 1, 1, 1)$. Esiste un sottospazio affine di dimensione 2 che contiene i punti A, B, C e O se e solo se questi vettori sono linearmente dipendenti cioè se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango minore di 3. Il minore formato dalla seconda e terza riga e dalle prime due colonne ha determinante non nullo. I suoi orlati sono $\begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante $-4k+8$ e $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante 0. L'unico valore per cui si annullano entrambi è $k = 2$, e quindi per tale valore la matrice ha rango 2, mentre per $k \neq 2$ la matrice ha rango 3.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f_k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica sia la matrice $A_k := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v} := (1, 1, 2)$.

2	

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f_k?

k=1

Motivazione:

L'immagine di f_k è generata dai vettori corrispondenti alle colonne di A_k. La matrice A_k ha determinante nullo per ogni valore di k, e il minore $B := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ formato dalle ultime due colonne e dalle prime due righe ha determinante diverso da 0. Dunque, per ogni valore di k la matrice A_k ha rango 2 e l'immagine di f_k ha come base i vettori corrispondenti alla ultime due colonne di A_k (quelle necessarie a formare il minore B). Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f se e solo se è combinazione lineare di questi vettori, cioè se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, cioè determinante 0. Questa matrice ha determinante $-2k + 2$ che si annulla se e solo se $k = 1$.

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k?

$k = 1$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k se e solo se esiste λ tale che $f_k(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Moltiplicando la matrice A per il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2k \end{pmatrix}$ si ottiene che $f(\mathbf{v}) = (-1, -1, -2k)$. Dunque $\mathbf{v}$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che

$$(-1, -1, -2k) = \lambda(1, 1, 2),$$

cioè $-1 = \lambda$, $-1 = \lambda$ e $-2k = 2\lambda$. Ciò avviene se e solo se $\lambda = -1$ e $k = 1$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 1$

2	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (2,1,1,0)$ e $\mathbf{v} := (0,1,0,1)$ e sia $F_k := \{(x,y,z,w) \mid x-y=0, x-kz+w=0\}$ con k parametro reale.

3

(a) Per quali valori di k la somma $E+F_k$ è diretta?

$k \neq 3$

Motivazione:

La somma tra E e F_k è diretta se e solo la loro intersezione è ridotta al solo vettore nullo. Un generico vettore di E si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(2,1,1,0) + \beta(0,1,0,1) = (2\alpha, \alpha+\beta, \alpha, \beta).$$

Poiché i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti si ottiene il vettore nullo solo per $\alpha = \beta = 0$. Imponendo che un generico vettore di E appartenga a F_k troviamo le condizioni $2\alpha - (\alpha+\beta) = 0$ e $2\alpha - k\alpha + \beta = 0$ vale a dire

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ (2-k)\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

La matrice di questo sistema in α e β è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2-k & 1 \end{smallmatrix}\right)$ il cui determinante è $3-k$. Dunque per $k \neq 3$ il sistema è Crameriano e quindi ammette solo la soluzione banale (e, dunque, $E \cap F_k = \{\mathbf{0}\}$), mentre per $k = 3$ la matrice ha rango 1 e il sistema ammette soluzioni non banali (e, dunque, $E \cap F_k \neq \{\mathbf{0}\}$: più precisamente poiché le soluzioni del sistema in α e β dipendono da $2-1=1$ parametro si ha $\dim(E \cap F_k) = 1$).

2

(b) Determina $\dim(E+F_k)$ al variare del parametro k.

$\dim(E+F_k) = 4$ se $k \neq 3$, $\dim(E+F_k) = 3$ se $k = 3$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $\dim E = 2$. Inoltre F_k, essendo definito da due equazioni linearmente indipendenti per ogni valore di k ha dimensione $4-2=2$. Dal punto precedente sappiamo che $\dim(E \cap F_k) = 0$ per $k \neq 3$ e $\dim(E \cap F_k) = 1$ per $k = 3$. Per la formula di Grassmann abbiamo allora $\dim(E+F_k) = \dim E + \dim F_k - \dim(E \cap F_k)$ da cui otteniamo $\dim(E+F_k) = 4$ per $k \neq 3$ e $\dim(E+F_k) = 3$ per $k = 3$.

2

(c) Determina una base ortonormale per E.

$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{66}}, -\frac{5}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}, -\frac{6}{\sqrt{66}}\right)$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (3, 2)$, $B := (2, 5)$ e $C := (5, 6)$.

2 (a) Determina l'equazione cartesiana della retta r passante per B e che divide il triangolo ABC in due triangoli di area uguale.

$-x - 2y + 12 = 0$

Motivazione:

Affinché la retta r divida il triangolo in due, deve passare per un punto M del segmento AC. Se prendiamo come base del triangolo AMB il lato AM e come base del triangolo CMB il lato CM, vediamo che rispetto a tali basi i triangoli AMB e CMB hanno la stessa altezza, precisamente la distanza del punto C dalla retta passante per A e B. Affinché i triangoli AMC e BMC abbiano la stessa area, devono allora avere le basi scelte uguali, cioè AM deve essere uguale a CM. In altri termini M deve essere il punto medio di A e C. Troviamo allora $M := \left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (4, 4)$. La retta cercata è la retta passante per B ed M cioè la retta $r : \begin{vmatrix} x-2 & y-5 \\ 4-2 & 4-5 \end{vmatrix} = 0$, vale a dire $-x - 2y + 12 = 0$.

2 (b) Determina un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$D = (6, 3)$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo già che il punto medio tra A e C è il punto $M := (4, 4)$. Il punto D è il simmetrico di B rispetto a M: se $D := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0+2}{2}, \frac{y_0+5}{2}\right) = (4, 4)$ da cui otteniamo $x_0 = 6$, $y_0 = 3$.

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 < 0 \\ x - 3y + 13 > 0 \\ 3x + y - 11 > 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano date le rette $r : \begin{cases} x + 3y - 4z + 10 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

3 (a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

$3x - y + 2z - 4 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si può scrivere come: $\lambda(x+3y-4z+10)+\mu(2x+y-z+3) = 0$ ovvero $(\lambda + 2\mu)x + (3\lambda + \mu)y + (-4\lambda - \mu)z + 10\lambda + 3\mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, -1, -2)$, otteniamo la relazione $(\lambda + 2\mu) \cdot 1 + (3\lambda + \mu) \cdot (-1) + (-4\lambda - \mu) \cdot (-2) = 0$, vale a dire $6\lambda + 3\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = -1$ e $\mu = 2$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2 (b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

$3x - y + 2z - 12 = 0$

Motivazione:

Il piano cercato è parallelo sia a r sia a s e, dunque, è parallelo al piano π, e ha, pertanto, equazione del tipo $3x - y + 2z + k = 0$. Per imporre che il piano contenga la retta s è allora sufficiente imporre che contenga un punto di s, ad esempio, il punto $(3, 1, 2)$, ottenendo la condizione $3 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 2 + k = 0$, da cui troviamo $k = -12$.

2 (c) La distanza tra i piani π e σ è.

$\frac{8}{\sqrt{14}}$

Motivazione:

Poiché i piani sono paralleli, la distanza tra essi è uguale alla distanza di un punto arbitrario su uno dei due piani e l'altro piano. Prendiamo dunque il punto $P := (3, 1, 2)$ di σ e calcoliamo la sua distanza da π:

$$\mathrm{d}(\sigma, \pi) = \mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$