COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dato il parametro reale k, siano dati la matrice $A_k := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5-k & 3 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 (a) Determinare i valori di k per i quali esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia diagonale.

$k = 2$

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile con matrice di passaggio ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A_k è simmetrica se e solo se $5 - k = 3$ cioè se e solo se $k = 2$.

2 (b) Determinare i valori di k per i quali il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di A_k.

$k = 4$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di A_k se e solo $A\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{v}$. Facendo il prodotto: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5-k & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12-3k \end{pmatrix}$ si vede che $\mathbf{v}$ è autovettore di A_k se e solo se esiste λ tale che $\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12-3k \end{pmatrix}$ cioè $3\lambda = 0$, $-\lambda = 12 - 3k$. Ciò avviene se e solo se $\lambda = 0$ e $k = 4$.

2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento affine. Siano poi dati i punti $A := (18, -6)$, $B := (30, -15)$, $C := (-24, 8)$ e la retta $r : x + 3y - 2 = 0$.

2	

(a) La retta s passante per A e B interseca la retta r? ☒ Sì ☐ No

Il segmento di estremi A e B interseca la retta r? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

Poiché i coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di r sono $(1, 3)$, la retta r ha parametri direttori $(3, -1)$. I parametri direttori di s sono $(30 - 18, -15 - (-6)) = (12, -9)$: poiché questi parametri direttori non sono proporzionali ai parametri direttori di r, le rette r e s non sono parallele, e sono, dunque, incidenti in un punto.

I due semipiani delimitati da r sono definiti dalle disequazioni $x+3y-2 > 0$ e $x+3y-2 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $x + 3y - 2$ otteniamo $18 + 3(-6) - 2 = -2$. Abbiamo un numero negativo, dunque A appartiene al semipiano di disequazione $x + 3y - 2 < 0$. Sostituendo le coordinate di B in $x + 3y - 2$ otteniamo $30 + 3(-15) - 2 = -17$. Abbiamo un numero negativo, dunque B appartiene al semipiano di disequazione $x + 3y - 2 < 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca la retta r perché A e B stanno nello stesso semipiano delimitato da r.

2	

(b) La retta n passante per A e C interseca la retta r? ☐ Sì ☒ No

Il segmento di estremi A e C interseca la retta r? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I parametri direttori di n sono $(-24 - 18, 8 - (-6)) = (-42, 18)$: poiché questi parametri direttori sono proporzionali ai parametri direttori di r, le rette r e n sono parallele, eventualmente coincidenti. Sostituendo le coordinate di A in $x + 3y - 2$ abbiamo $18 + 3(-6) - 2 \neq 0$ abbiamo: il punto A non giace dunque su r, e, quindi, r e n sono parallele distinte e non hanno pertanto punti in comune. A maggior ragione il segmento di estremi A e B non ha punti in comune con r.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Considerare, al variare del parametro reale k, il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 2k^2 - 4k\}.$$

2 (a) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 0$ e $k = 2$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $2k^2 - 4k = 0$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 0$

3 (b) Sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 3, 1)$ e $\mathbf{v} := (2, 1, 1)$. Determinare una base per $E_k \cap F$.

$(9, 7, 5)$

Motivazione:

Il sottospazio F è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(1, 3, 1) + \beta(2, 1, 1) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta, \alpha + \beta).$$

Il vettore $(\alpha+2\beta, 3\alpha+\beta, \alpha+\beta)$ appartiene a E_k se e solo se $(\alpha+2\beta)-2(3\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = 0$, cioè $-4\alpha + \beta = 0$, vale a dire $\beta = 4\alpha$.

Dunque $E_k \cap F = \{(9\alpha, 7\alpha, 5\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Una base per $E_k \cap F$ si ottiene scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1$.

2 (c) Determinare una base ortonormale di E_k rispetto al prodotto scalare standard.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(p(x)) := 3p(x) + 2p'(x)$ (si ricorda che la derivata di un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ è $p'(x) = b + 2cx$).

2	

(a) Determina la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ (cioè la base formata da 1, x e x^2 in quest'ordine).

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Calcoliamo l'immagine tramite f dei vettori della base canonica e decomponiamo i vettori così ottenuti rispetto alla base canonica stessa. Si ha $f(1) = 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$: sulla prima colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(3, 0, 0)$. Si ha poi $f(x) = 3x + 2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot x + 0 \cdot x^2$: sulla seconda colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(2, 3, 0)$. Infine $f(x^2) = 3x^2 + 2 \cdot 2x = 3x^2 + 4x = 0 \cdot 1 + 4 \cdot x + 3 \cdot x^2$: sulla terza colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(0, 4, 3)$.

3	

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
3	1

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ 0 & 3-x & 4 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3 - x)^3$, che si annulla se e solo $x = 3$.

Per trovare i polinomi del tipo $a + bx + cx^2$ che sono autovettori di f relativamente all'autovalore 3, risolviamo il sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b e c associato alla matrice $A - 3I$, cioè

$$\begin{cases} 2b = 0 \\ 4c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(a, 0, 0)$ con a parametro reale. Una base di $E(3)$ si ottiene ponendo $a = 1$ ed ottenendo così il polinomio 1.

2	

(c) L'endomorfismo è diagonalizzabile? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

L'unico autospazio di f ha dimensione 1. La somma delle dimensioni degli autospazi di f è, dunque, minore della dimensione di $\mathbb{R}^3[x]$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo siano dati il punto $A := (8, -5)$ e la retta $r : 3x - 4y - 19 = 0$.

| 2 | |

(a) Determina la proiezione ortogonale H di A su r: $\boxed{H = (5, -1)}$

Motivazione:

La retta r è ortogonale al vettore $(3, -4)$. La retta n passante per A e ortogonale a r ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = -5 - 4t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $3(8+3t)-4(-5-4t)-19 = 0$ che ha soluzione $t = -1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate del punto $H = (5, -1)$ proiezione di A su r.

| 3 | |

(b) Determina due punti B e C su r tali che ABC sia un triangolo di area 25 con i lati AB e AC uguali. $\boxed{B = (9, 2)}\boxed{C = (1, -4)}$

Motivazione:

L'altezza di ABC relativa al lato BC è uguale alla distanza di A dalla retta r, cioè alla distanza di A da H ovvero a $\sqrt{(8-5)^2 + (-5-(-1))^2} = 5$. Affinché l'area sia uguale a 25 il lato BC deve quindi avere lunghezza $\frac{25 \cdot 2}{5} = 10$.
Poiché i lati AB e AC sono uguali la proiezione ortogonale di A sul lato BC, cioè H, è il punto medio di B e C: dunque B e C sono i punti della retta r la cui distanza da H è uguale alla metà della lunghezza del lato BC. I punti B e C appartengono cioè alla circonferenza di centro H e raggio $\frac{10}{2} = 5$, la cui equazione è $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ 3x - 4y - 19 = 0 \end{cases}$$

troviamo i punti cercati.

| 2 | |

(c) Determina un punto D diverso da A tale che DBC sia un triangolo di area uguale all'area di ABC con i lati DB e DC uguali. $\boxed{D = (2, 3)}$

Motivazione:

Poiché i lati DB e DC sono uguali la proiezione di D sulla retta r è uguale al punto medio tra B e C, cioè H. Poiché l'area di ABC e l'area di DBC sono uguali le altezze relative al lato BC nei due triangoli sono uguali, vale a dire che le distanze di A e D dalla retta r sono uguali. Dunque A e D sono due punti equidistanti da r aventi la stessa proiezione ortogonale su r, cioè H: poiché A e D sono distinti ciò significa che D è il simmetrico di A rispetto alla retta r, cioè è H è il punto medio di A e D. Dunque, se $D = (\bar{x}, \bar{y})$ si ha $\frac{8+\bar{x}}{2} = 5$ e $\frac{-5+\bar{y}}{2} = -1$, da cui ricaviamo $\bar{x} = 2$ e $\bar{y} = 3$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $P := (1, 3, 1)$ appartenente al piano $\pi : 3x + 2y + 2z - 11 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

2

(a) Il piano σ contenente r e ortogonale a π ha equazione cartesiana:

$4x - 9y + 3z - 1 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(x - 3y + 2z) + \mu(x - 3z - 1) = 0$.
Tale fascio può essere riscritto come: $(\lambda + \mu)x - 3\lambda y + (2\lambda - 3\mu)z - \mu = 0$.
Questo piano è ortogonale al piano π se e solo se i vettori $(\lambda + \mu, -3\lambda, 2\lambda - 3\mu)$ e $(3, 2, 2)$ sono ortogonali. Otteniamo così la condizione: $3(\lambda + \mu) + 2(-3\lambda) + 2(2\lambda - 3\mu) = 0$, cioè $\lambda - 3\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 3$ e $\mu = 1$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano σ.

2

(b) La proiezione ortogonale di r sul piano π ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 4x - 9y + 3z - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 11 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La proiezione ortogonale della retta r su π si ottiene intersecando il piano π con il piano che passa per r ed è ortogonale a π cioè il piano σ.

3

(c) Le sfere tangenti in P al piano π e aventi raggio $\sqrt{17}$ hanno equazioni cartesiane:

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = 17 \qquad (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 17$

Motivazione:

Le sfere cercate hanno centro sulla retta n ortogonale a π e passante per P: questa ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Imponendo che il punto generico $(1+3t, 3+2t, 1+2t)$ di n disti $\sqrt{17}$ da P troviamo la condizione $(1+3t-1)^2 + (3+2t-3)^2 + (1+2t-1)^2 = 17$ le cui soluzioni $t = 1$ e $t = -1$, sostituite nelle equazioni parametriche di n danno le coordinate dei due centri delle sfere $C_1 := (4, 5, 3)$ e $C_2 := (-2, 1, -1)$.