COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Sia g l'endomorfismo di V definito da $g(\mathbf{v}) := f(3\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$

2	

(a) Sia dato un vettore $\mathbf{w} \in \ker f$.

☒ $\mathbf{w} \in \ker g$ sempre
☐ $\mathbf{w} \in \ker g$ solo se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Sappiamo che $f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. E allora:
$g(\mathbf{w}) = f(3\mathbf{w}) = 3f(\mathbf{w}) = 3 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dunque $\mathbf{w} \in \ker g$.

2	

(b) Sia $\mathbf{u}$ un autovettore di f relativamente all'autovalore 5. Allora:

☐ il vettore $\mathbf{u}$ è autovettore di g relativamente all'autovalore 5
☒ il vettore $\mathbf{u}$ è autovettore di g relativamente all'autovalore 15
☐ il vettore $\mathbf{u}$ è autovettore di g relativamente all'autovalore 8
☐ il vettore $\mathbf{u}$ non è autovettore di g

Motivazione:

Sappiamo che $f(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u}$. E allora:
$g(\mathbf{u}) = f(3\mathbf{u}) = 3f(\mathbf{u}) = 3 \cdot 5\mathbf{u} = 15\mathbf{u}$.

2	

2. Siano dati i punti $P_0 := (1, 2, 0, 0)$, $P_1 := (1, 0, 2, 0)$, $P_2 := (1, 0, 0, 2)$, $P_3 := (3, 0, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ passante per i punti P_0, P_1, P_2 e P_3.

$\Sigma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3 = 0$

Motivazione:

Consideriamo un'equazione cartesiana generica di un iperpiano di $\mathbb{R}^4$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0$$

Imponendo il passaggio per i quattro punti abbiamo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + b = 0 \\ a_1 + 2a_3 + b = 0 \\ a_1 + 2a_4 + b = 0 \\ 3a_1 + b = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzioni $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = k, b = -3k$.
Ponendo $k = 1$ abbiamo un'equazione cartesiana dell'iperpiano.
Ovviamente tutte le altre equazioni cartesiane del piano sono proporzionali a questa.

2	

(b) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per P_0 e perpendicolare a Σ.

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}$$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, 1, 1)$ avente come coordinate i coefficienti delle variabili nell'equazione di Σ, è perpendicolare a Σ. La retta r, dal momento che passa per P_0, ha pertanto le equazioni parametriche scritte sopra.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) := (x + 2y + 3z, -x - 2y - 3z, 2x + 4y + 6z)$.

2	

(a) Determinare una base dell'immagine di f.

$(1, -1, 2)$.

Motivazione:

La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. La seconda colonna è il doppio della prima e quindi $f(\mathbf{e}_2) = 2f(\mathbf{e}_1)$.
La terza colonna è il triplo della prima e quindi $f(\mathbf{e}_3) = 3f(\mathbf{e}_1)$.
E quindi l'immagine ha come base il vettore $f(\mathbf{e}_1) = (1, -1, 2)$.

2	

(b) Determinare una base del nucleo di f.

$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (3, 0, -1)$

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente sappiamo che l'immagine ha dimensione uguale a 1. Ne segue che il nucleo ha dimensione 2. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Abbiamo $f(\mathbf{e}_2) = 2f(\mathbf{e}_1)$ e quindi $f(2\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = f(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$.
Segue che $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = (2, -1, 0) = \mathbf{v}_1 \in \ker f$.
Si verifica analogamente che $3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_2 \in \ker f$.
I vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono chiaramente linearmente indipendenti e formano quindi una base di $\ker f$.

2	

(c) Determinare una base del nucleo che sia ortonormale relativamente al prodotto scalare standard di R^3.

$\mathbf{w}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0), \mathbf{w}_2 = (\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{5}{\sqrt{70}})$

Motivazione:

Applichiamo il metodo di Gram-Schmidt alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Poniamo:
$\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_1 = (2, -1, 0)$
$\mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -1\right)$.
Abbiamo ottenuto una base ortogonale. Per ottenere da questa una base ortonormale, ne normalizziamo i vettori:
$\mathbf{w}_1 =: \frac{\mathbf{u}_1}{\sqrt{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1}}$
$\mathbf{w}_2 =: \frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_2}}$

4. Si consideri uno spazio vettoriale V avente come base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Si consideri l'endomorfismo f di V tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_3, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

2 (a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 (b) Determinare la matrice B associata a f relativamente alla base $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Si ha:
$f(\mathbf{w}_1) = f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1$
$f(\mathbf{w}_2) = f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3$
$f(\mathbf{w}_3) = f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_2$

e quindi la matrice associata a f è la matrice B scritta sopra.

3 (c) Determinare una matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Le matrici A e B sono le matrici associate a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e alla base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ rispettivamente.
La matrice M è pertanto la matrice di passaggio dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ alla base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$.
Dal momento che si ha:
$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$
$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$
$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$,
la matrice M è la matrice scritta sopra.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 1)$ e $B := (3, 3)$.

2	

(a) Determinare i punti C e D appartenenti all'asse del segmento AB aventi distanza dalla retta r passante per A e B uguale a $2\sqrt{2}$.

$C = (4, 0) \qquad D = (0, 4)$

Motivazione:

Il punto medio dei punti A e B è ovviamente $M := (2, 2)$.
Un vettore parallelo alla retta r è $(3 - 1, 3 - 1) = (2, 2)$.
Un vettore perpendicolare alla retta r è quindi $(1, -1)$.
L'asse s del segmento AB ha quindi equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

La distanza di un punto generico P dell'asse s dalla retta r è uguale alla distanza di P da M. Calcoliamo quindi quest'ultima distanza e poniamola uguale a $2\sqrt{2}$:
$\mathrm{d}(P, M) = \sqrt{(2 + t - 2)^2 + (2 - t - 2)^2} = 2\sqrt{2}$. Segue $t = \pm 2$.
Pertanto $C = (4, 0)$ e $D = (0, 4)$.

2	

(b) Calcolare l'area del quadrilatero $ACBD$.

8

Motivazione:

L'area del quadrilatero $ACBD$ è uguale alla somma delle aree dei triangoli ABC e ABD. Entrambi questi triangoli hanno come base il segmento AB e altezza relativa ad esso uguale $2\sqrt{2}$. La lunghezza della base AB è uguale a $2\sqrt{2}$. L'area dei triangoli ABC e ABD è quindi uguale a $\frac{1}{2} 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.
L'area del quadrilatero $ACBD$è quindi uguale a 8.

3	

(c) Sia E il punto simmetrico di A rispetto a B e sia F il punto simmetrico di B rispetto a A. Calcolare l'area del quadrilatero $ECFD$.

24

Motivazione:

Il punto E, simmetrico di A rispetto a B, appartiene per definizione alla retta r e $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(E, B)$.
Analogamente il punto F, simmetrico di B rispetto a A, appartiene alla retta r e $\mathrm{d}(B, A) = \mathrm{d}(F, A)$.
Ne segue che $\mathrm{d}(E, F) = 3\,\mathrm{d}(A, B)$ (fare una figura). Poiché ovviamente le altezze dei triangoli ECF e EDF sono uguali alle altezze dei triangoli ACB e ABD, l'area del quadrilatero $ECFD$ è uguale al triplo dell'area del quadrilatero $ACBD$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano $\pi : x + 2y + z - 7 = 0$, il punto $A := (1, 3, 0)$ appartenente a π e i punti $B := (3, 7, 2)$ e $C := (3, 6, 2)$.

2	

(a) Sia r la retta passante per i punti A e B. Quante sono le rette passanti per A, appartenenti al piano π e perpendicolari alla retta r? Determinare, se esiste, una di tale rette dandone equazioni cartesiane.

Ne esistono infinite. Una di esse ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} x + 2y + z - 7 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

Motivazione:

La retta r, avendo parametri direttori $(3-1, 7-3, 2-0) = (2, 4, 2)$ è perpendicolare al piano π.
Pertanto tutte le rette del piano π passanti per A verificano le condizioni richieste. Sono quindi infinite. Per determinarne una, consideriamo un qualsiasi piano passante per A distinto da π, per esempio $\beta : 3x - y = 0$. La retta cercata è data dall'intersezione dei piani π e β.

3	

(b) Sia s la retta passante per i punti A e C. Quante sono le rette passanti per A, appartenenti al piano π e perpendicolari alla retta s? Determinare, se esiste, una di tale rette dandone equazioni cartesiane.

Ne esiste una sola. Essa ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} x + 2y + z - 7 = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 11 = 0 \end{cases}$

Motivazione:

La retta s ha parametri direttori $(3-1, 6-3, 2-0) = (2, 3, 2)$. Non è quindi perpendicolare al piano π. Tutte le rette passanti per A e perpendicolari alla retta s appartengono al piano α passante per A e perpendicolare a s. Tutti i piani perpendicolari alla retta s hanno equazione $2x + 3y + 2z + a = 0$. Imponendo il passaggio per A otteniamo $a = -11$. Il piano α ha quindi equazione $2x + 3y + 2z - 11 = 0$ La retta cercata deve appartenere anche al piano π e quindi è l'intersezione dei piani α e π.

2	

(c) Verificare se la retta passante per B e C è parallela al piano π o se lo interseca in un punto.

Il piano e la retta si intersecano in un punto.

Motivazione:

La retta passante per B e C ha parametri direttori $(3-3, 6-7, 2-2 = (0, -1, 0)$. Poiché $(0, -1, 0) \times (1, 2, 1) = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -2 \neq 0$, la retta e il piano non sono paralleli. Si intersecano quindi in un punto.