COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sono dati i punti $A = (-2, 1, 1)$, $B = (3, 7, 3)$ e la sfera $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 - 50 = 0$.

2 (a) Il segmento AB interseca la sfera?

No

Motivazione:

La sfera ha centro $C := (4, 4, 2)$ e raggio $r := \sqrt{50}$. Si ha poi $\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{46} < r$ e $\mathrm{d}(B, C) = \sqrt{11} < r$.
I punti A e B sono quindi interni alla sfera assegnata. Dal momento che l'insieme dei punti interni ad una sfera è un insieme convesso, il segmento di estremi A e B non contiene punti della sfera data.

2 (b) La semiretta di origine A passante per B in quanti punti interseca la sfera?

Un punto

Motivazione:

Ogni semiretta con origine in un punto interno di una sfera interseca la sfera in un solo punto.

2. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^4$ così definito:
$E_k := \{(x, y, z, w)|(k-1)x + (k+1)y + 2w - k^2 + 4 = z + 2w = 0\}$

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

$k = -2$ e $k = 2$

Motivazione:

Abbiamo un sistema di equazioni nelle variabili x, y, z e w che è lineare per ogni valore del parametro k. Un sistema lineare di equazioni ha come soluzioni un sottospazio vettoriale se e solo è omogeneo. Nel caso trattato ciò avviene se e solo se $k^2 - 4 = 0$. Da cui segue $k = -2$ e $k = 2$.

2	

(b) Scelto uno dei valori di k precedentemente calcolati, determinare una base di E_k.

Valore scelto $k = 2$. $\mathbf{v}_1 = (-2, 0, -2, 1), \mathbf{v}_2 = (-3, 1, 0, 0)$.

Motivazione:

Scegliamo $k = 2$. Il sistema diviene:

$$\begin{cases} x + 3y + 2w & = & 0 \\ z + 2w & = & 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è: $\begin{cases} x & = & -3h_2 - 2h_1 \\ y & = & h_2 \\ z & = & -2h_1 \\ w & = & h_1 \end{cases}$

Ponendo prima $h_1 = 1, h_2 = 0$ e poi $h_1 = 0, h_2 = 1$ otteniamo una base del sottospazio vettoriale.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Al variare del parametro reale k, è dato l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è $A_k := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2k & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare , per ogni valore di k, una base dell'immagine di f_k.

Per $k = 0$, base: $\mathbf{v}_1 := (4, 0, -4)$
Per $k \neq 0$, base: $\mathbf{v}_1 := (4, 0, -4), \mathbf{v}_2 = (-2, -2k, 2)$.

Motivazione:

Osserviamo che la prima colonna della matrice A_k è il doppio della terza colonna. Pertanto $\operatorname{rk} A_k < 3$ per ogni valore di k. Osserviamo poi che, per $k = 0$ la prima colonna di A_k è uguale alla seconda colonna di A_k moltiplicata per -2. Ne segue che per $k = 0$ si ha che l'immagine di f_k ha dimensione uguale a 1 e una sua base è data da $\mathbf{v}_1 := (4, 0, -4)$. Per $k \neq 0$ il minore diA_k formato dalle prime due righe e due colonne è invertibile. Ne segue che per $k \neq 0$ una base dell'immagine di f_k è data $\mathbf{v}_1 := (4, 0, -4), \mathbf{v}_2 = (-2, -2k, 2)$.

3	

(b) Posto $k = 0$, determinare, se esiste, una base di autovettori.

$\mathbf{w}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{w}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{w}_3 = (1, 0, -1)$

Motivazione:

Il determinante della matrice $A - \lambda I$ è uguale a $\lambda^3 - 2\lambda^2$ e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Dal momento che l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica uguale a 1, l'autospazio ad esso relativo ha dimensione uguale a 1. Cerchiamo una base per l'autospazio relativo all'autovalore nullo, cioè il nucleo. Dal momento che l'immagine ha dimensione 2, il nucleo ha dimensione 1. Abbiamo visto che la prima colonna della matrice è il doppio della terza. Ma allora il vettore $\mathbf{w}_1 = (1, 0, -2)$ è un vettore del nucleo. Abbiamo poi visto che per $k = 0$ la terza colonna della matrice e' uguale all'opposto della seconda colonna. Ma allora il vettore $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 1)$ è un vettore del nucleo. I vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base del nucleo.
Cerchiamo ora una base dell'autospazio relativo all'autovalore 2. Consideriamo la matrice $A_k - 2I$, per $k = 0$.Otteniamo $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Notiamo che la prima colonna è uguale alla terza. Ne segue che il vettore $\mathbf{w}_3 = (1, 0, -1)$ è un autovettore con autovalore 2. Dal momento che l'autospazio relativo ha dimensione 1 abbiamo trovato una sua base.

2	

(c) Posto $k = 0$, determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori.

Non esiste.

Motivazione:

La matrice associata all'endomorfismo relativamente alla base canonica non è simmetrica. Non esiste quindi una base di autovettori che sia ortonormale.

4. In $\mathbb{R}^4$ sono dati il sottospazio vettoriale V generato dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,0,1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,-1)$ e il sottospazio vettoriale $W = \{(x,y,z,w) | x-y = x+z-w = 0\}$.

2 (a) Determinare una base di V.

$\mathbf{v}_1 := (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,1)$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$: $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le seconda e la quarta riga della matrice sono uguali; inoltre la terza riga è somma della prima e della seconda e quindi $\operatorname{rk} A < 3$. Inoltre il minore di A formato dalle prime due righe e due colonne è invertibile. Ne segue che si ha $\operatorname{rk} A = 2$. I vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono una base di V.

3 (b) Determinare una base di W.

$\mathbf{w}_1 = (1,1,0,1)$, $\mathbf{w}_2 = (-1,-1,1,0)$.

Motivazione:

La matrice dei coefficienti del sistema dato dalle equazioni che caratterizzano W è $B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il minore formato dalle prime due righe e due colonne è invertibile. Le soluzioni sono quindi: $x = -t_2 + t_1; y = -t_2 + t_1; z = t_2; w = t_1$. Un primo vettore di una base di W si ottiene allora ponendo $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$. Si ottiene quindi $\mathbf{w}_1 = (1,1,0,1)$. Un secondo vettore si ottiene ponendo ora $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ otteniamo il secondo vettore della base: $\mathbf{w}_2 = (-1,-1,1,0)$.

2 (c) Determinare una base ortonormale di $V + W$.

$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$

Motivazione:

Consideriamo la matrice C avente come colonne le coordinate dei vettori appartenenti alle basi scelte di V e W. Si ha $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice ha rango uguale a 4 e quindi $\dim(V + W) = 4$. Pertanto $V + W = \mathbb{R}^4$. E quindi possiamo prendere come base ortonormale la base canonica.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $B := (5, 3)$ sulla retta $r : x - 2y + 1 = 0$ e il punto $A := (6, -4)$.

2 (a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia isoscele con base BC (cioè $AB = AC$).

$\boxed{C = (1, 1)}$

Motivazione:

Poiché il triangolo è isoscele il punto medio dei vertici B e C coincide con la proiezione M di A sulla retta passante per B e C, cioè la retta r.
Per determinare M consideriamo la retta n ortogonale a r e passante per A:

$$\begin{cases} x = \ \ 6 + \ t \\ y = -4 - 2t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $(6+t)-2(-4-2t)+1 = 0$ che ha soluzione $t = -3$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo che $M = (3, 2)$.
Se $C := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0+5}{2}, \frac{y_0+3}{2}\right) = (3, 2)$ da cui otteniamo $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

2 (b) Il triangolo ABC ha area:

$\boxed{\text{area uguale a } 15}$

Motivazione:

Il lato BC ha lunghezza uguale a $\sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$. L'altezza relativa a questo lato è uguale alla distanza tra A e il punto M determinato al punto precedente ed è, quindi, uguale a $\sqrt{(6-3)^2 + (-4-2)^2} = 3\sqrt{5}$. L'area cercata è, pertanto, uguale a $\frac{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{2} = 15$.

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - 2y + \ \ 1 > 0 \\ 7x + \ y - 38 < 0 \\ x + \ y - \ \ 2 > 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sono dati il piano $\pi : x - y + z - 3 = 0$, la retta $r : \begin{cases} x = \phantom{-2+{}} 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = \phantom{-2+{}} 2t \end{cases}$ e la retta $s : \begin{cases} 3x - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

3	

(a) La retta r appartiene al piano π?

Sì, la retta appartiene al piano.

Motivazione:

Consideriamo due punti della retta e vediamo se essi verificano l'equazione del piano π. Prendiamo il punto $A := (1, -2, 0)$ (ottenuto ponendo $t = 0$) e $B := (0, -1, 2)$ (ottenuto ponendo $t = 1$). Sostituendo le loro coordinate nell'equazione del piano otteniamo in ambo i casi un'identità. Ne segue che i due punti appartengono entrambi al piano. Pertanto la retta r appartiene al piano π.

2	

(b) Determinare la proiezione ortogonale p della retta s sul piano π

$$p : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

Consideriamo il fascio di piani contenenti la retta $s : a(3x - z) + b(x + y + 1) = 0$, cioè $(3a+b)x+by-3az+b = 0$. Imponiamo la perpendicolarità con $\pi : 1 \cdot (3a+b)+(-1)b+1 \cdot 3a = 0$. Svolgendo i calcoli si trova $a = 0$ e b qualsiasi. Il piano cercato è quindi $x + y + 1 = 0$. La retta è l'intersezione di questo piano con il piano $x - y + z - 3 = 0$.

2	

(c) Verificare che le rette r e p sono incidenti e determinare il piano che le contiene.

Il piano che le contiene è il piano π

Motivazione:

Nella risposta (a) abbiamo visto che la retta r è contenuta nel piano π. Inoltre la retta p appartiene, per costruzione, al piano π. Per dimostrare che le due rette sono incidenti, cerchiamo i loro eventuali punti di intersezione inserendo le coordinate del punto mobile della retta r nelle equazioni della retta p. Svolgendo i calcoli si ottiene $t = 2$. Il che vuol dire che le due rette si intersecano in un punto.