COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si dimostri la verità o falsità delle seguenti affermazioni riguardanti matrici appartenenti a $M(n, n, \mathbb{R})$.

2 (a) Da $A + B = A + C$ segue $B = C$.

Vera.

Motivazione:

Nell'uguaglianza $A + B = A + C$ sommiamo ad ambo i membri la matrice $-A$. Otteniamo: $-A + A + B = -A + A + C$. Si ha $-A + A = 0$, dove 0 è la matrice nulla di ordine n. Otteniamo pertanto $0 + B = 0 + C$, da cui $B = C$.

2 (b) Se $A \neq 0$, allora da $AB = AC$ segue $B = C$.

Falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Si ha $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i punti $P_0 := (1,0,0,0), P_1 := (1,1,0,0), P_2 := (1,1,1,0), P_3 := (1,1,1,1)$.

2 (a) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine Σ dei punti P_0, P_1, P_2, P_3

$\dim \Sigma = 3$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim \Sigma = \dim F$ dove F è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. Abbiamo $\dim F = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il minore formato dalle ultime tre righe è invertibile.

2 (b) Dato il punto $A := (1,2,3,4)$, determinare, se esistono, due sottospazi affini Π e Π' di dimensione 1 passanti per A che siano entrambi paralleli a Σ, ma che non siano paralleli tra loro.

$\Pi : A + t(P_1 - P_0) \quad , \quad \Pi' : A + t(P_2 - P_0), t \in \mathbb{R}$

Motivazione:

Consideriamo il vettore $P_1 - P_0$ e il sottospazio vettoriale G da esso generato. Chiaramente $G \subset F$ e quindi il sottospazio affine $\Pi : A + G$ è parallelo a Σ. Analogamente il sottospazio affine $\Pi' : A + G'$ dove G' è il sottospazio affine generato da $P_2 - P_0$ è parallelo a Σ.
I sottospazi affini Π e Π' non sono paralleli perché i sottospazi G e G' non coincidono dal momento che i vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ non sono multipli uno dell'altro.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} x + \quad\quad z = 0 \\ x + \ y + kz = 1 \\ kx + ky + \ z = -1 \end{cases}$$

3	

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

$k \neq -1$ e $k \neq 1$

Motivazione:

Un sistema di 3 equazioni e 3 incognite ha una sola soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da 0. Nel nostro caso la matrice dei coefficienti è: $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$. Il determinante di A si annulla per $k = -1$ e per $k = 1$. Se k è diverso da questi due valori il sistema ha, quindi, una sola soluzione.

2	

(b) Determinare tutti i valori di k per cui $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$ è soluzione del sistema.

$k = 2$

Motivazione:

Sostituendo nel sistema di partenza alle incognite x, y e z rispettivamente i valori $-1, 0$ e 1, si ha:

$$\begin{cases} -1 + \quad\quad 1 = 0 \\ -1 + \quad 0 + k = 1 \\ -k + k \cdot 0 + 1 = -1 \end{cases}$$

Il valore $k = 2$ è l'unico valore di k per il quale sono verificate le tre uguaglianze.

2	

(c) Determinare tutti i valori di k per cui il sistema di partenza ha infinite soluzioni.

$k = -1$

Motivazione:

Nella risposta (a) abbiamo visto che per $k = 1$ o $k = -1$ il sistema ha una sola soluzione. Vediamo cosa succede per $k = 1$ e $k = -1$. Per $k = 1$ si osserva che la matrice dei coefficienti del sistema ha rango uguale a 2 mentre la matrice completa ha rango uguale a 3. In questo caso quindi non si hanno soluzioni.
Per $k = -1$ si osserva che sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno rango uguale 2. Il sistema ha quindi infinite soluzioni.

4. Si consideri la seguente matrice $A := \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3

(a) Determinare, se esistono, una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^{-1}AM = D$.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico $p(A - xI)$ sviluppandolo secondo la terza riga. Otteniamo $p(A-xI) = ((-2-x)^2-16)(-3-x) = (-2-x+4)(-2-x-4)(-3-x)$. Gli autovalori sono quindi $x_1 = 2, x_2 = -6, x_3 = -3$. Essendo le molteplicità algebriche dei tre autovalori tutte uguali a 1, i tre autospazi hanno tutti dimensione uguale a 1. Per determinare una base dell'autospazio relativo all'autovalore 2 consideriamo la matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Dal momento che la prima e la seconda colonna solo uguali, abbiamo che il vettore $(1, -1, 0)$ è una base dell'autospazio relativo all'autovalore 2. Una base ortonormale è $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Per determinare una base dell'autospazio relativo all'autovalore -6 consideriamo la matrice $A + 6I = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Dal momento che la seconda colonna è l'opposto della prima, abbiamo che il vettore $(1, 1, 0)$ è una base dell'autospazio relativo all'autovalore 6. Una base ortonormale è $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Osservando la matrice A si deduce immediatamente che il vettore $(0, 0, 1)$ è una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore -3. Da questi dati ricaviamo la matrice M e la matrice D.

2

(b) Determinare, se esiste, una matrice ortogonale $M' \neq M$, tale che $M'^{-1}AM' = D$, dove M e D sono le matrici determinate nella risposta (a).

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Consideriamo una nuova base dell'autospazio relativo all'autovalore 2 prendendo il vettore opposto a quello scelto nella risposta (a). Lasciamo tutti gli altri autovettori inalterati.

2

(c) Determinare, se esistono, una matrice ortogonale N e una matrice diagonale $D' \neq D$, tali che $N^{-1}AN = D'$ dove D è la matrice determinata nella risposta (a).

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Scambiamo tra loro i primi due autovettori dati nella risposta (a) e quindi scambiamo anche tra loro i primi due autovettori.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il punto $A := (3,5)$ e la retta $r : x + 3y + 2 = 0$.

2	

(a) Determinare il punto B simmetrico del punto A rispetto alla retta r.

$\boxed{B = (-1,-7)}$

Motivazione:

Cerchiamo la proiezione ortogonale H del punto A sulla retta r. Il vettore $(1,3)$ è ortogonale alla retta r e quindi la retta s passante per A e ortogonale a r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + \ \ t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$$

Si ha $H = r \cap s$ e quindi inserendo le coordinate di un punto generico di s nell'equazione di r otteniamo: $3 + t + 15 + 9t + 2 = 0$. da ciò segue $t = -2$ e quindi $H = (1,-1)$. Il punto B è tale che il punto H è punto medio di A e B. Quindi: $(\frac{3+x}{2}, \frac{5+y}{2}) = (1,-1)$. Segue $B = (-1,-7)$.

3	

(b) Determinare i punti C e C' tali che i triangoli ACB e $AC'B$ siano retti nei vertici C e C' rispettivamente e siano isosceli.

$\boxed{C = (7,-3), C' = (-5,1)}$

Motivazione:

Gli angoli $\widehat{ACB}$ e $\widehat{AC'B}$ devono essere retti, e quindi i punti C e C' devono appartenere alla circonferenza di centro H passante per A che ha equazione $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 40$ dal momento che $d(A,H) = \sqrt{(3-1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{40}$.

I triangoli ABC e ABC' devono essere isosceli (necessariamente con base AB) e quindi i punti C e C' devono appartenere all'asse del segmento AB che è la retta r. Da tutto ciò segue che le coordinate dei punti C e C' devono verificare il sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 40 \\ x + 3y + 2 = \ \ 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottengono le coordinate dei punti cercati.

2	

(c) Calcolare l'area del quadrilatero $ACBC'$.

$\boxed{\text{Area} = 80}$

Motivazione:

Il quadrilatero $ACBC'$ è un quadrato e quindi la sua area è il quadrato della lunghezza del lato AC. Si ha $d^2(A,C) = (7-3)^2 + (-3-5)^2 = 16 + 64 = 80$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punt $U_1 := (1, 0, 0)$, $U_2 := (0, 1, 0)$ e $U_3 := (0, 0, 1)$.
Considerare, per ogni intero i, con $1 \le i \le 3$ il punto P_i appartenente al segmento OU_i tale che $\mathrm{d}(O, P_i) = \frac{1}{2}$.

2 | (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano passante per P_1, P_2 e per P_3.

$x + y + z = \frac{1}{2}$

Motivazione:

Si verifica facilmente che si ha $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0), P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0), P_3 = (0, 0, \frac{1}{2})$.Prendiamo un piano generico $ax + by + cz = d$ e imponiamo il passaggio per i tre punti. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a = d \\ \dfrac{1}{2}b = d \\ \dfrac{1}{2}c = d \end{cases}$$

Prendendo $a = b = c = 1$ e $d = \frac{1}{2}$ otteniamo l'equazione del piano π: $x + y + z = \frac{1}{2}$.

2 | (b) Determinare equazioni parametriche dell'altezza del tetraedro $OP_1P_2P_3$ passante per O.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Motivazione:

L'altezza cercata è perpendicolare al piano π. I suoi parametri direttori sono allora $1, 1, 1$.
Inoltre passa per il punto O. Ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

3 | (c) Determinare equazioni cartesiane della circonferenza passante per P_1, P_2 e per P_3.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{4} \\ x + y + z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Motivazione:

Ricordiamo che i punti P_1, P_2, P_3 hanno distanza uguale a $\frac{1}{2}$ dall'origine. Appartengono quindi alla sfera di centro O e raggio uguale a $\frac{1}{2}$. La circonferenza cercata può essere vista come intersezione della sfera appena trovata con il piano π.