COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si dimostri la verità o falsità delle seguenti affermazioni riguardanti matrici appartenenti a $M(n, n, \mathbb{R})$.

2 (a) Se A è simile a B, allora $-A$ è simile a $-B$.

Vera.

Motivazione:

Se A è simile a B, allora esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^{-1}AM$. Ma allora $-B = -M^{-1}AM$ e quindi $-B = M^{-1}(-A)M$. Pertanto $-A$ è simile a $-B$.

2 (b) Date due matrici invertibili A e B, se A è simile a B, allora A^{-1} è simile a B^{-1}.

Vera.

Motivazione:

Se A è simile a B, allora esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^{-1}AM$. Consideriamo l'inversa di B. Abbiamo:
$B^{-1} = (M^{-1}AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1}(M^{-1})^{-1} = M^{-1}A^{-1}M$.
E quindi A^{-1} è simile a B^{-1}.

2. Si considerino, al variare del parametro k, i vettori $\mathbf{v}_1 := 1 + x + x^2 + 2x^3, \mathbf{v}_2 := kx + x^2 + 2x^3$, $\mathbf{v}_3 := x^2 + x^3, \mathbf{v}_4 := 2x^3$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4[x]$.
Sia V il sottospazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
Sia W il sottospazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per i quali $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

$k \neq 0$

Motivazione:

Consideriamo la matrice M avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ relativamente alla base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4[x]$.

Abbiamo $\dim(V+W) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & k & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Svolgendo i calcoli vediamo che $\det M = 0 \Leftrightarrow k = 0$. E quindi $\dim(V+W) = 4 \Leftrightarrow k \neq 0$.
Dalla formula di Grassmann segue $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W)$. E quindi $V \cap W = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(V \cap W) = 0 \Leftrightarrow \dim(V+W) = 4 \Leftrightarrow k \neq 0$.

2	

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali $\dim(V \cap W) = 2$

nessun valore di k.

Motivazione:

Sappiamo cosa succede per $k \neq 0$. Vediamo ora cosa succede per $k = 0$.

Abbiamo $\dim(V+W) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} = 3$. Infatti sappiamo che il determinante della matrice è nullo. Inoltre si vede facilmente che il minore ottenuto togliendo la seconda riga e la seconda colonna è invertibile.
E quindi $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 1$ per $k = 0$.
Segue che $\dim(V \cap W) = 2$ per nessun valore di k.

COGNOME......................NOME......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + (k^2 - k)z = 0 \\ 2x + 3y - z = k^2 - 1 \end{cases}$$

3	

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

$k \neq 0$ e $k \neq 1$

Motivazione:

Un sistema di 3 equazioni e 3 incognite ha una sola soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da 0. Nel nostro caso la matrice dei coefficienti è: $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k^2 - k \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Il determinante di A si annulla per $k = 0$ e per $k = 1$. Se k è diverso da questi due valori il sistema ha, quindi, una sola soluzione.

2	

(b) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni del sistema forma un sottospazio vettoriale di dimensione uguale a 1.

$k = 1$

Motivazione:

Affinché l'insieme delle soluzioni formi un sottospazio vettoriale, il sistema deve essere omogeneo e quindi si deve avere $k^2 - 1 = 0$, cioè $k = 1$ o $k = -1$.
Consideriamo prima il caso $k = 1$. Sappiamo che per $k = 1$ si ha $\det A = 0$. Inoltre il minore formato dalle prime due righe e colonne è invertibile. Quindi si ha $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = 2$, dove A' è la matrice completa del sistema. Segue che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di dimensione uguale a $3 - 2 = 1$.
Consideriamo ora il caso $k = -1$. Abbiamo già visto che in questo caso il sistema ha una sola soluzione.

2	

(c) Determinare per quali valori di k il sistema ammette almeno una soluzione in cui risulta $z = 0$.

$k = -1$ e $k = 1$

Motivazione:

Poniamo nel sistema di partenza $z = 0$. Abbiamo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = k^2 - 1 \end{cases}$ La matrice dei coefficienti è $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. La terza riga della matrice B è la somma delle prime due righe.
Affinché si abbiano soluzioni si deve avere necessariamente che il termine noto della terza equazione sia uguale alla somma dei termini noti delle prime due equazioni. Si deve quindi avere $k^2 - 1 = 0$, cioè $k = -1$ e $k = 1$. In questo caso il sistema diventa omogeneo e quindi ha almeno la soluzione nulla.

4. Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4[x]$ definito da:
$f(a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_0 + 2a_1 + (2a_0 + 2a_1)x + 4a_2x^2 + (3a_2 + 3a_3)x^3)$.

1

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$1 - x$

Motivazione:

Calcoliamo innanzitutto la dimensione di $\ker f$. Abbiamo:
$\dim \ker f = 4 - \dim f(\mathbb{R}^4[x]) = 4 - \operatorname{rk} A = 4 - 3 = 1$. Il rango di A è uguale a 3 poiché la matrice A ha le prime due colonne uguali e quindi $\operatorname{rk} A < 4$ e il minore formato dalle ultime tre righe e tre colonne è invertibile.
Dal momento che $\dim \ker f = 1$, per determinare una base di $\ker f$ è sufficiente trovare un vettore non nullo la cui immagine sia nulla. Dal momento che le prime due colonne della matrice A sono uguali abbiamo $f(1) = f(x)$ e quindi $f(1 - x) = 0$.

4

(c) Determinare, se esistono, una invertibile M e una matrice diagonale D tali che $M^{-1}AM = D$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli vediamo che le radici del polinomio caratteristico sono 0 con molteplicità 1, 3 con molteplicità 1 e 4 con molteplicità 2. Cerchiamo una base per ogni autospazio.
Sappiamo già che una base per $E(0) = \ker f$ è $1 - x$.

Per determinare una base di $E(3)$ consideriamo il sistema $(A - 3I)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Svolgendo i calcoli si trovano le soluzioni $a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = t$.
Ponendo t=1 abbiamo $a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1$, cioè il vettore x^3.
Svolgendo calcoli analoghi troviamo che si ha $\dim E(4) = 2$ e che una base di $E(4)$ è data da $1 + x, x^2 + 3x^3$.
Dal momento che la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale a 4, l'endomorfismo è diagonalizzabile. Una base di autovettori è data da: $1 - x, x^3, 1 + x, x^2 + 3x^3$. Da cui determiniamo la matrice M.
La matrice diagonale D ha sulla diagonale principale gli autovalori degli autovettori scritti nell'ordine determinato dall'ordine scelto per gli autovettori.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il punto $A := (3, 5)$ e la retta $r : x + 2y + 2 = 0$ e il punto $C := (-3, 1)$.

2	

(a) Determinare il punto B simmetrico del punto A rispetto alla retta r.

$\boxed{B = (-3, -7)}$

Motivazione:

Cerchiamo la proiezione ortogonale H del punto A sulla retta r. Il vettore $(1, 2)$ è ortogonale alla retta r e quindi la retta s passante per A e ortogonale a r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

Si ha $H = r \cap s$ e quindi inserendo le coordinate di un punto generico di s nell'equazione di r otteniamo: $3 + t + 10 + 4t + 2 = 0$. da ciò segue $t = -3$ e quindi $H = (0, -1)$. Il punto B è tale che il punto H è punto medio di A e B. Quindi: $(\frac{3+x}{2}, \frac{5+y}{2}) = (0, -1)$. Segue $B = (-3, -7)$.

3	

(b) Determinare il centro D della circonferenza passante per A, B e C.

$\boxed{D = (4, -3)}$

Motivazione:

Il centro della circonferenza è dato dal punto di intersezione dei tre assi del triangolo ABC. L'asse del segmento AB è la retta r dal momento che il punto B è il simmetrico di A rispetto ad r.

Cerchiamo ora l'asse del segmento BC. Il punto medio di B e C è $N := (-3, -3)$. La retta passante per B e C ha ovviamente equazione $x = -3$ e quindi la retta s ad essa perpendicolare passante per N ha equazione $y = -3$. Cerchiamo $D = r \cap s$ inserendo $y = -3$ nell'equazione della retta r. Otteniamo $D = (4, -3)$.

2	

(c) Determinare i punti interni al triangolo ABC.

$$\boxed{\begin{cases} x + 3 > 0 \\ -2x + y + 1 > 0 \\ -2x + 3y - 9 < 0 \end{cases}}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, 2, 3)$ e la retta:

$$r : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = \quad t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano α contenente sia il punto A che la retta r.

$\alpha : -x - 2y + z + 2 = 0$

Motivazione:

Ponendo $t = 0$ e $t = 1$ nelle equazioni parametriche della retta r otteniamo rispettivamente i punti $B := (4, 0, 2)$ e $C := (3, 1, 3)$. Consideriamo ora il piano α passante per i punti A, B e C:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

E quindi $\alpha : -x - 2y + z + 2 = 0$

2	

(b) Determinare la distanza tra il punto A e la retta r.

$\mathrm{d}(A, r) = \sqrt{2}$

Motivazione:

Sia π il piano passante per A e perpendicolare a r.
$\pi : -(x - 1) + y - 2 + z - 3 = 0$. E quindi: $\pi : -x + y + z - 4 = 0$. Cerchiamo il punto $H = r \cap \pi$, proiezione ortogonale di A su r, inserendo le coordinate del generico punto di r nell'equazione di π. $-4 + t + t + 2 + t - 4 = 0$, da cui $t = 2$ e quindi $H = (2, 2, 4)$.
Abbiamo pertanto: $\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$.

3	

(c) Determinare le equazioni della circonferenza contenuta nel piano α, avente il centro in A e tangente alla retta r.

$$\begin{cases} -x - 2y + z + 2 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2 \end{cases}$$

Motivazione:

Chiaramente la circonferenza cercata ha H come punto di tangenza con la retta r.
La circonferenza cercata è quindi l'intersezione del piano α con la sfera di centro A e raggio uguale alla distanza di A da H.