COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f : V \longrightarrow W$ un omomorfismo tra spazi vettoriali.

| 2 | |

(a) Se $\dim V = 4$ e $\dim W = 2$ allora:

☒ $\dim \ker f > 0$ per ogni omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per nessun omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per alcuni omomorfismi f, per altri omomorfismi f si ha $\dim \ker f = 0$

Motivazione:

Si ha $\dim \ker f + \dim f(V) = \dim V = 4$.
Poiché $f(V) \subseteq W$, si ha $\dim f(V) \leq \dim W = 2$.
Si ha quindi $\dim \ker f \geq 2 > 0$ per ogni omomorfismo f.

| 2 | |

(b) Se $\dim V = 2$ e $\dim W = 4$ allora:

☐ $\dim \ker f > 0$ per ogni omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per nessun omomorfismo f
☒ $\dim \ker f > 0$ per alcuni omomorfismi f, per altri omomorfismi f si ha $\dim \ker f = 0$

Motivazione:

In alcuni casi si ha $\dim \ker f > 0$.
Per esempio, se f è l'omomorfismo nullo, si ha $\dim \ker f = 2$.
In altri casi si ha $\dim \ker f = 0$.
Per esempio, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è una base di V e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ è un base di W, l'omomorfismo f tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ ha $\dim \ker f = 0$
poiché $\dim V = \dim f(V) = 2$.

2. Siano dati $A := (1,2,3,4)$, $B := (2,1,4,3)$, $C := (4,3,2,1)$, $D := (2,3,4,1)$ e $P := (1,1,2,0)$.

2	

(a) Indicato con Σ l'iperpiano contenente i punti A, B, C e D, determinare il semispazio delimitato da Σ e contenente il punto P.
Nel caso in cui il sottospazio affine contenente i punti A, B, C e D non sia un iperpiano, determinarne la dimensione e NON rispondere alla domanda successiva. In tal caso questa domanda vale 4 punti.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 < 0.$

Motivazione:

Imponendo il passaggio per i punti A, B, C e D del generico iperpiano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + h = 0$ si ha il sistema $\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d + h &= 0 \\ 2a + b + 4c + 3d + h &= 0 \\ 4a + 3b + 2c + d + h &= 0 \\ 2a + 3b + 4c + d + h &= 0 \end{cases}$.
Svolgendo i calcoli si vede che il sistema omogeneo ha soluzioni dipendenti da un parametro. Quindi Σ è un iperpiano. Posto il parametro uguale a 1, si ottiene un'equazione dell'iperpiano: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 = 0$. Le coordinate di P, sostituite in tale equazione, rendono il primo membro negativo e perciò P non appartiene all'iperpiano e appartiene al semispazio delimitato dalla disequazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 < 0$.

2	

(b) Determinare la proiezione ortogonale H del punto P sull'iperpiano Σ.

$H = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

Motivazione:

Il punto H è l'intersezione di Σ con la retta r passante per P e ortogonale a Σ.
La retta r passante per P e ortogonale all'iperpiano Σ ha equazioni parametriche:
$r := \begin{cases} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= 1 + t \\ x_3 &= 2 + t \\ x_4 &= t \end{cases}$
Introducendo le coordinate del punto generico di r nell'equazione di Σ abbiamo:
$1+t+1+t+2+t+t-10 = 0$, da cui $t = \frac{3}{2}$. E quindi $H = (1+\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}, 2+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia V uno spazio vettoriale avente come base i vettori $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4$.
Sia E il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori
$\mathbf{e}_1 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3,\ \mathbf{e}_2 := \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_3 := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$.
Sia F il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori
$\mathbf{f}_1 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{f}_2 := \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,\ \mathbf{f}_3 :=\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$.

2	

(a) Determinare le dimensioni di E e di F.

$\dim E = 2,\ \dim F = 2.$

Motivazione:

I tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sono linearmente dipendenti in quanto $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. I vettori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono linearmente indipendenti, poiché nessuno dei due è multiplo dell'altro. La dimensione dello spazio vettoriale E è quindi 2.
I tre vettori $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ sono linearmente dipendenti in quanto $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2$. I vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sono linearmente indipendenti, poiché nessuno dei due è multiplo dell'altro. La dimensione dello spazio vettoriale F è quindi 2.

2	

(b) Determinare la dimensione di $E + F$ e una sua base.

$\dim E + F = 3$, base: $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_1$

Motivazione:

Costruiamo la matrice A' avente come colonne le coordinate rispetto la base di V dei vettori della base di E e della base di F determinate nella risposta di (a). $A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Facendo i calcoli si vede che si ha $\det A' = 0$. Inoltre il minore di A' formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne ha determinante diverso da 0. Quindi $\dim(E+F) = \operatorname{rk} A' = 3$.
Una base per $E + F$ quindi è $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_1$ dal momento che la matrice avente come colonne le coordinate di tali vettori ha rango uguale a 3, per quel che abbiamo appena scritto.

3	

(c) Determinare la dimensione di $E \cap F$ e una sua base.

$\dim E \cap F = 1$ base: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{u}$ di $E \cap F$ deve poter essere scritto come combinazione lineare sia dei vettori della base di E che dei vettori della base di F.
Poniamo pertanto: $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 = h\mathbf{f}_1 + k\mathbf{f}_2$. Sviluppando l'uguaglianza rispetto ai vettori della base di V si ottiene il sistema $\begin{cases} a - h = 0 \\ b - h = 0 \\ a - k = 0 \\ b - k = 0 \end{cases}$ che ha soluzione (t, t, t, t). Per $t = 1$ si ottiene il vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ che rappresenta quindi una base per $E \cap F$.

4. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:
$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) := 3a_0 + 6a_2 + (a_0 + 2a_2)x + (a_0 + 2a_2)x^2$.

| 3 | |

(a) Determinare gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio di f.
Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori distinti effettivamente presenti).

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$x, 2 - x^2$
5	$3 + x + x^2$

Motivazione:

La matrice associata a f, relativamente alla base canonica $\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = x, \mathbf{e}_3 = x^2$ è
$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 6 \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = -x^2(x-5)$, che si annulla per 0 e 5. Gli autovalori sono quindi 0 e 5 con molteplicità 2 e 1 rispettivamente. Sappiamo che si ha $\dim E(0) = \dim \ker f \leq 2$. Osservando la matrice A, notiamo che la seconda colonna è nulla. Quindi $\mathbf{e}_2 = x \in \ker f$. Inoltre la terza colonna è il doppio della prima. Quindi $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 = 2 - x^2 \in \ker f$. I due vettori trovati sono linearmente indipendenti dal momento che uno non è un multiplo dell'altro. Dal momento che abbiamo visto in precedenza che si ha $\dim \ker f \leq 2$, abbiamo $\dim \ker f = 2$ e una sua base è data proprio dai due vettori appena trovati.
Per calcolare $E(5)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 5I$, cioè
$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ le cui soluzioni sono $(3h, h, h)$ con h parametro reale. Una base di $E(5)$ si ottiene ponendo $h = 1$. Abbiamo quindi che il vettore $3e_1 + e_2 + e_3 = 3 + x + x^2$ è una base di $E(5)$.

| 2 | |

(b) Determinare , se esiste, una matrice diagonale D e una matrice M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

| 2 | |

(c) Determinare la dimensione del sottospazio affine $f^{-1}(3 + x + x^2)$ e determinarne tutti i suoi vettori.

$\dim f^{-1}(3 + x + x^2) = 2$, $f^{-1}(3 + x + x^2) = \{1 + t_1(x) + t_2(2 - x^2) |\ t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Si ha $f^{-1}(3 + x + x^2) = \mathbf{v}_0 + \ker f$ con $f(\mathbf{v}_0) = 3 + x + x^2$.
Quindi $\dim f^{-1}(3 + x + x^2) = \dim \ker f = 2$.
Osservando la prima colonna della matrice A, notiamo che si ha $f(\mathbf{e}_1) = f(1) = 3 + x + x^3$.
poniamo quindi $\mathbf{v}_0 = 1$.
Abbiamo una base di $\ker f$, quindi $\ker f = \{t_1(x) + t_2(2 - x^2) |\ t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$.
Da tutto ciò segue:
$f^{-1}(3 + x + x^2) = \{1 + t_1(x) + t_2(2 - x^2) |\ t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia data la retta t di equazione $x-2y-2=0$.

| 2 | |

(a) Determinare l'equazione della circonferenza γ tangente alla retta t nel suo punto P di ascissa uguale a 4 ed avente il centro C sulla retta r di equazione $x+y-7=0$.

$\gamma : (x-2)^2 + (y-5)^2 = 20.$

Motivazione:

Inserendo il valore 4 al posto della x nell'equazione della retta t otteniamo $y = 1$. Si ha quindi $P = (4, 1)$. La generica retta s_k perpendicolare a t ha equazione $2x+y+k = 0$ dal momento che i vettori $(1, -2)$ e $(2, 1)$, perpendicolari alle due rette, sono tra loro perpendicolari. Imponendo il passaggio di s_k per il punto P si ottiene $k = -9$. Pertanto la retta s passante per P e perpendicolare a t ha equazione $2x+y-9 = 0$. Il centro C della circonferenza è dato dall'intersezione di t e di s. Risolvendo il sistema $\begin{cases} x+y-7 &= 0 \\ 2x+y-9 &= 0 \end{cases}$, si ha $C = (2, 5)$. La circonferenza γ ha centro in C e raggio $r = \mathrm{d}(P, C) = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$. La sua equazione è $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$.

| 2 | |

(b) Determinare le rette $s_1,\ s_2$ perpendicolari alla retta t, aventi distanza uguale a $\sqrt{5}$ dal centro C della circonferenza γ.

$2x+y-4=0$ e $2x+y-14=0$

Motivazione:

La generica retta s_k perpendicolare a t ha equazione $2x+y+k = 0$. La retta s_k ha distanza $\sqrt{5}$ da C se e solo se risulta $\frac{|4+5+k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, da cui si ricava $k_1 = -4$ e $k_2 = -14$. Le rette s_1, s_2 hanno pertanto, rispettivamente, equazioni $2x+y-4 = 0$ e $2x+y-14 = 0$.

| 3 | |

(c) Determinare l'area del rettangolo i cui vertici sono i punti di intersezione delle due rette $s_1,\ s_2$ con la circonferenza γ.

$20\sqrt{3}$

Motivazione:

Siano A e B i punti di intersezione di una delle due rette, ad esempio s_1, con la circonferenza γ. Indicati con A' e B' gli altri vertici del rettangolo, si ha $\mathrm{Area}(ABB'A') = \mathrm{d}(A, B) \cdot \mathrm{d}(A, A')$. Per determinare la distanza tra A e B, consideriamo il punto medio M di A e B. Dal momento che la retta passante per A e B è perpendicolare alla retta passante per C e M, possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo AMC, la cui ipotenusa è raggio della circonferenza γ. Si ha pertanto $\mathrm{d}(A, M) = \sqrt{\mathrm{d}(C, A)^2 - \mathrm{d}(C, M)^2} = \sqrt{20-5} = \sqrt{15}$. Da ciò segue $\mathrm{d}(A, B) = 2\sqrt{15}$. D'altronde $\mathrm{d}(A, A') = 2\,\mathrm{d}(C, M) = 2\sqrt{5}$. E quindi $\mathrm{Area}(ABB'A') = 2\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{75} = 20\sqrt{3}$.

6. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano. Sia dato il piano $\pi : 2x+2y+2z-7=0$.

| 2 | |

(a) Determinare l'equazione della sfera di centro $K := (1,1,0)$ tangente al piano π.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{3}{4}$

Motivazione:

Il raggio della sfera è $r = \mathrm{d}(K,\pi) = \frac{|2+2-7|}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$.
La sfera ha pertanto equazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{3}{4}$

| 2 | |

(b) Dati, al variare del parametro reale h, i punti $A := (1,1,h), B := (2,h,1), C := (h+1,h,0)$, determinare h in modo che il triangolo ABC sia rettangolo con ipotenusa AC.

$h = 1$

Motivazione:

Affinché il triangolo ABC abbia un angolo retto in B, si deve avere $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ dove $\mathbf{v}$ è un vettore direttore della retta passante per A e B e $\mathbf{w}$ è un vettore direttore della retta passante per C e B. Si ha $\mathbf{v} = (1, h-1, 1-h)$ e $\mathbf{w} = (h-1, 0, -1)$. Posta la condizione $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ si ha $h - 1 - 1 + h = 0$, da cui si ricava $h = 1$.

| 3 | |

(c) Posto h uguale al valore ottenuto in (b), stabilire se il piano π interseca il triangolo ABC.

Il piano π interseca il triangolo ABC.

Motivazione:

Per $h = 1$ risulta $A = (1,1,1), B = (2,1,1), C = (2,1,0)$.
Sostituendo le coordinate di A nell'equazione del piano π si ha $2+2+2-7 = -1 < 0$.
Sostituendo le coordinate di B nell'equazione del piano π si ha $4+2+2-7 = 1 > 0$.
Ciò implica che A e B sono in due diversi semispazi rispetto al piano π, cioè che il lato AB interseca il piano π e pertanto il piano interseca il triangolo.