COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni:

2

(a) Se due matrici A e B di ordine n sono simili, allora, per ogni $h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$, le matrici hA e kB sono simili.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Diamo un controesempio. Consideriamo $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $h = 2, k = 3$. Ovviamente A e B, essendo la stessa matrice, sono simili. Le matrici $2A$ e $3B$ hanno come autovalori 2 e 3 rispettivamente e quindi non sono simili.

2

(b) Se due matrici A e B di ordine n sono simili ad una stessa matrice C, allora A e B sono simili.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Se A e B sono simili ad una matrice C, allora esistono $M \in GL(n, \mathbb{R})$ e $N \in GL(n, \mathbb{R})$ tali che $C = M^{-1}AM$ e $C = N^{-1}BN$. Da ciò segue $M^{-1}AM = N^{-1}BN$.
Moltiplicando ambo i membri di questa identità a sinistra per M e a destra per M^{-1}, otteniamo $A = MN^{-1}BNM^{-1}$.
Posto $P = NM^{-1}$, abbiamo $P^{-1} = MN^{-1}$ e quindi $A = P^{-1}BP$. Le matrici A e B sono allora simili.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati $A := (1, 0, 2, -1), B := (3, 1, 1, 0), C := (0, 1, 2, 1)$.

1

(a) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine Σ generato da A, B, C. Determinare equazioni parametriche di Σ.

$$\dim \Sigma = 2 \qquad \Sigma : \begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 + t_2 \\ x_3 = 2 - t_1 \\ x_4 = -1 + t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

Motivazione:

La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice M avente come colonne le coordinate dei vettori $B - A, C - A$. Abbiamo $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Il minore di M formato dalle prime due righe e colonne è invertibile.
Quindi $\dim \Sigma = \operatorname{rk} M = 2$. Il sottospazio affine Σ ha equazioni parametriche
$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 + t_2 \\ x_3 = 2 - t_1 \\ x_4 = -1 + t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

3

(b) Sia Σ' il sottospazio affine di dimensione 2 di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + 3t_2 \\ x_2 = 2t_1 \\ x_3 = 2 - t_1 - t_2 \\ x_4 = 1 + 3t_1 - t_2 \end{cases}.$$
Verificare se Σ e Σ' sono paralleli e, se lo sono, verificare se sono coincidenti o distinti.

Σ e Σ' sono paralleli distinti.

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente segue che Σ è dato da $A + E$ dove E è il sottospazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1 = B - A = (2, 1, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = C - A = (-1, 1, 0, 2)$.
Invece Σ' è dato da $\mathbf{v}_0 + E'$ dove $\mathbf{v}_0 = (2, 0, 2, 1)$ e E' è il sottospazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_3 = (1, 2, -1, 3)$ e $\mathbf{v}_4 = (3, 0, -1, -1)$. Pertanto Σ e Σ' sono paralleli se e solo se $E = E'$, il che avviene se e solo se $\mathbf{v}_3 \in E, \mathbf{v}_4 \in E$.
Si ha $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e quindi $\mathbf{v}_3 \in E$. Inoltre $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ e quindi $\mathbf{v}_4 \in E$.
Pertanto Σ e Σ' sono paralleli. Sono quindi distinti o coincidono.
Per vedere se Σ e Σ' coincidono o meno, vediamo se $A \in \Sigma'$.
Sostituendo le coordinate di A in Σ' si ottiene il sistema $\begin{cases} 1 = 2 + t_1 + 3t_2 \\ 0 = 2t_1 \\ 2 = 2 - t_1 - t_2 \\ -1 = 1 + 3t_1 - t_2 \end{cases}$ che non ha soluzioni. Pertanto Σ e Σ' sono paralleli distinti.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Siano dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:
$U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a+b+c=0\}$
V sottospazio vettoriale avente come base $(1,0,0),(0,1,0)$.

3	

(a) Determinare una base di $U \cap V$.

$(1,-2,0)$

Motivazione:

Abbiamo $\{V = t_1(1,0,0) + t_2(0,1,0) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\} = \{(t_1,t_2,0) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$ e quindi i vettori di V sono i vettori del tipo $(a,b,0)$. Da ciò segue che i vettori di $U \cap V$ sono i vettori (a,b,c) verificanti il sistema $\begin{cases} 2a+b+c &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$. Il sistema ha come soluzioni $(t,-2t,0)$. Posto $t=1$, otteniamo il vettore $(1,-2,0)$ che è una base di $U \cap V$.

2	

(b) Determinare una base di $U+V$.

$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

Motivazione:

Abbiamo $\dim U = \dim V = 2$ e $\dim(U \cap V) = 1$. Dalla formula di Grassmann segue: $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2+2-1 = 3$ e quindi $U+V = \mathbb{R}^3$.
Come base di $U+V$ possiamo pertanto prendere la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

3	

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ supplementare di U.

$(1,1,1)$

Motivazione:

Dal momento che $\dim U = 2$, si ha $\dim W = 1$. Per determinare una base di W possiamo scegliere un qualsiasi vettore non appartenente a U. Prendiamo, per esempio, $(1,1,1)$, che non appartiene a U perché $2+1+1 \neq 0$.

4. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e sia dato, al variare di h in $\mathbb{R}$, l'endomorfismo f di V associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & h \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, rispetto alla base data.

2 (a) Determinare, al variare di h, una base per il nucleo di f.

Se $h \neq 0$, $\ker f = \{0\}$ e quindi non ha base.
Se $h = 0$ una base di $\ker f$ è $\mathbf{v}_3$.

Motivazione:

Si ha $\det A = 2h$. Pertanto, se $h \neq 0$, l'endomorfismo f è un isomorfismo; da ciò segue $\ker f = \{0\}$ e quindi $\ker f$ non ha base.
Se $h = 0$ si ha $\operatorname{rk} A = 2$ e quindi $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Esaminando la terza colonna della matrice A vediamo che si ha $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$. Una base di $\ker f$ è quindi $\mathbf{v}_3$.

3 (b) Determinare tutti i valori di h per i quali f è diagonalizzabile.

$h \neq 1, h \neq 2$

Motivazione:

La matrice A è triangolare. I suoi autovalori sono quindi $1, 2, h$.
Quindi, se $h \neq 1, h \neq 2$, l'endomorfismo f ha 3 autovalori distinti. Essendo $\dim V = 3$ si ha che f è diagonalizzabile.
Se $h = 1$, allora f ha come autovalori 1 di molteplicità 2 e 2 di molteplicità 1.
Calcoliamo allora la dimensione dell'autospazio $E(1)$. Si ha $\dim E(1) = 3 - \operatorname{rk}(A - I)$. Abbiamo $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\operatorname{rk}(A - I) = 2$. Segue $\dim E(1) = 1 < 2$. L'endomorfismo non è pertanto diagonalizzabile.
In modo analogo si vede che, se $h = 2$, gli autovalori di f sono 1 di molteplicità 1 e 2 di molteplicità 2 e che $\dim E(2) = 1 < 2$. Anche in questo caso l'endomorfismo f non è pertanto diagonalizzabile.

2 (c) Posto $h = 3$, determinare una base di autovettori di f.

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$

Motivazione:

Posto $h = 3$ abbiamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché A è triangolare gli autovalori sono 1, 2 e 3.
Ognuno dei relativi autospazi ha dimensione uguale a 1.
Dalla matrice A osserviamo che si ha $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$. Da ciò segue che $\mathbf{v}_1$ è una base per l'autospazio $E(1)$.
Svolgendo i calcoli $(A - 2I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $a = b = t, c = 0$. Posto $t = 1$, troviamo che il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è una base dell'autospazio $E(2)$.
Svolgendo i calcoli $(A - 3I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $a = \frac{3}{2}t, b = 3t, c = t$. Posto $t = 2$, troviamo che il vettore $3\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ è una base dell'autospazio $E(3)$.
Abbiamo quindi che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ è una base di autovettori.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia data la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.

2	

(a) Determinare i vertici del quadrato $\mathcal{Q}$ circoscritto alla circonferenza γ e avente i lati paralleli agli assi coordinati.

$A = (-2, -1), B = (-2, 7), C = (6, 7), D = (6, -1)$

Motivazione:

L'equazione della circonferenza γ può essere scritta nella forma $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ e quindi γ ha centro in $E := (2, 3)$ e raggio $r = 4$.
I vertici del quadrato $\mathcal{Q}$ devono appartenere alle rette parallele agli assi coordinati aventi da E distanza uguale a 4. Queste sono $x = -2, x = 6, y = -1, y = 7$.
I vertici di $\mathcal{Q}$ sono quindi $A = (-2, -1), B = (-2, 7), C = (6, 7), D = (6, -1)$.

2	

(b) Determinare un'equazione della circonferenza γ' circoscritta al quadrato $\mathcal{Q}$.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 32$

Motivazione:

La circonferenza γ' ha il centro coincidente con il centro E del quadrato $\mathcal{Q}$, che è il centro della circonferenza γ. Poiché il quadrato ha i lati di lunghezza uguale a 8, la circonferenza γ' ha il raggio uguale a $4\sqrt{2}$.
Un'equazione della circonferenza γ' è quindi $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 32$.

3	

(c) Determinare le quattro rette tangenti alla circonferenza γ' nei quattro vertici del quadrato $\mathcal{Q}$.

$x + y + 3 = 0$, $x + y - 13 = 0$
$x - y + 9 = 0$, $x - y - 7 = 0$

Motivazione:

Dal momento che il quadrato $\mathcal{Q}$ ha i lati paralleli agli assi coordinati, le sue diagonali sono parallele alle bisettrici degli assi coordinati. Segue che le rette tangenti alla circonferenza γ' nei vertici di $\mathcal{Q}$, essendo perpendicolari alle diagonali di $\mathcal{Q}$, sono anche esse parallele alle bisettrici degli assi coordinati. Hanno quindi equazioni del tipo $x+y+a = 0$ e $x-y+b = 0$.
Per determinare a, imponiamo il passaggio per $A = (-2, -1)$ e $C = (6, 7)$ ottenendo $a = 3$ e $a = -13$ rispettivamente. Abbiamo quindi le rette $x + y + 3 = 0$ e $x + y - 13 = 0$.
Per determinare b, imponiamo il passaggio per $B = (-2, 7)$ e $D = (6, -1)$ ottenendo $b = 9$ e $b = -7$ rispettivamente. Abbiamo quindi le rette $x - y + 9 = 0$ e $x - y - 7 = 0$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A : (-1, 2, 3)$, $B : (1, 1, 1)$ e $C := (-1, -2, -1)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per A, B e C.

$x - 2y + 2z - 1 = 0$

Motivazione:

Il piano α ha equazione $\begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-3 \\ 1-(-1) & 1-2 & 1-3 \\ -1-(-1) & -2-2 & -1-3 \end{vmatrix} = -4(x - 2y + 2z - 1) = 0$ e quindi α ha equazione cartesiana $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

3

(b) Determinare un'equazione cartesiana del piano β passante per i punti A e B e ortogonale al piano α.

$2x + 2y + z - 5 = 0$

Motivazione:

Consideriamo innanzitutto tutti i piani passanti per A:
$a(x + 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0$.
Imponendo il passaggio per il punto B otteniamo $a(1+1)+b(1-2)+c(1-3) = 0$. Abbiamo quindi la condizione $2a - b - 2c = 0$.
Dobbiamo ora imporre la perpendicolarità con il piano α, cioè $(a, b, c) \perp (1, -2, 2)$ e quindi $a - 2b + 2c = 0$. Abbiamo quindi il sistema $\begin{cases} 2a - b - 2c = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \end{cases}$. Il sistema ha soluzioni $a = b = k, c = \frac{1}{2}k$. ponendo $k = 2$ otteniamo $a = b = 2, c = 1$. Un'equazione cartesiana del piano β è quindi $2(x + 1) + 2(y - 2) + z - 3 = 0$, cioè $2x + 2y + z - 5 = 0$.

2

(c) Determinare equazioni cartesiane della retta passante per i punti A e B.

$\begin{cases} x - 2y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$

Motivazione:

Una retta nello spazio è rappresentata in forma di equazioni cartesiane da due equazioni lineari, ognuna delle quali rappresenta un piano contenente la retta. Ovviamente i due piani devono essere distinti.
Nelle due risposte precedenti abbiamo determinato due piani distinti passanti per A e B. Questi piani contengono quindi la retta passante per A e B. Le equazioni cartesiane sono quindi $\begin{cases} x - 2y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$