9 SETTEMBRE 2015 - SOLUZIONE ESAME DI GEOMETRIA - 12 CREDITI
INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2014-2015

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni:

2 (a) Se $\mathbf{v}$ è autovettore con autovalore uguale a 5, allora $\mathbf{w} := 4\mathbf{v}$ è un autovettore con autovalore uguale a 20.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Poiché $\mathbf{v}$ è autovettore con autovalore uguale a 5, allora $f(\mathbf{v}) = 5\mathbf{v}$.
Quindi $f(\mathbf{w}) = f(4\mathbf{v}) = 4f(\mathbf{v}) = 4 \cdot 5\mathbf{v} = 5 \cdot 4\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$.
Pertanto $\mathbf{w}$ è un autovettore con autovalore uguale a 5 e non 20.

2 (b) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori con autovalore uguale a 5, allora il vettore $\mathbf{v} + a\mathbf{w}$ è un autovettore se e solo se $a = 0$.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Poiché $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori con autovalore uguale a 5, allora $f(\mathbf{v}) = 5\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{w}) = 5\mathbf{w}$.
Quindi $f(\mathbf{v} + a\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + af(\mathbf{w}) = 4\mathbf{v} + a \cdot 4\mathbf{w} = 4(\mathbf{v} + a\mathbf{w})$.
Pertanto $\mathbf{v} + a\mathbf{w}$ è un autovettore con autovalore uguale a 5 per ogni valore di a.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati $A := (-1,-2,2,1), B := (0,1,-2,1), C := (0,0,1,-1), D := (0,0,0,1)$.

21

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ passante per A, B, C e D.

$\Sigma : 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 1 = 0$

Motivazione:

Prendendo un'equazione di un iperpiano generico $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e=0$ e imponendo il passaggio per i quattro punti otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -a-2b+2c+d+e &= 0 \\ b-2c+d+e &= 0 \\ c-d+e &= 0 \\ d+e &= 0 \end{cases}.$$

Svolgendo i calcoli, a partire dall'ultima equazione e via via salendo su, si ottiene $a = 4t, b = -4t, c = -2t, d = -t, e = t$.
Ponendo $t = 1$ otteniamo $\Sigma : 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 1 = 0$.

2

(b) Determinare equazioni parametriche di una retta passante per $F := (1,2,3,4)$ e parallela a Σ.

$$r : \begin{cases} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= 2+3t \\ x_3 &= 3-4t \\ x_4 &= 4 \end{cases}$$

Motivazione:

Una retta r parallela a Σ ha parametri direttori proporzionali ad un vettore parallelo a Σ; uno di questi è il vettore $B - A = (1,3,-4,0)$. I termini noti delle equazioni di r sono le coordinate di F. Abbiamo quindi: $r : \begin{cases} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= 2+3t \\ x_3 &= 3-4t \\ x_4 &= 4 \end{cases}.$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA............

3. Si consideri l'omomorfismo da $\mathbb{R}^3$ a $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da $f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+4b+5c & 2a+3b+5c \\ 3a+2b+5c & 4a+b+5c \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $M(2,2,\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Sia $\mathbf{v}_1 := (1,0,0), \mathbf{v}_2 := (0,1,0), \mathbf{v}_3 := (0,0,1)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Sia $\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonica di $M(2,2,\mathbb{R}^3)$. Si ha
$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + 3\mathbf{w}_3 + 4\mathbf{w}_4$, $f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4$,
$f(\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 5\mathbf{w}_1 + 5\mathbf{w}_2 + 5\mathbf{w}_3 + 5\mathbf{w}_4$.
Quindi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$(1,1,-1)$

Motivazione:

Nella matrice A le prime due colonne sono linearmente indipendenti e la terza è somma delle prime due, quindi $\dim f(\mathbb{R}^3) = \operatorname{rk} A = 2$. Da ciò segue $\dim \ker f = 3 - \dim f(\mathbb{R}^3) = 1$.
Per determinare una base di $\ker f$, cerchiamo quindi un vettore non nullo avente come immagine la matrice nulla. Dal momento che la terza colonna della matrice A è somma delle prime due, abbiamo che $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) - f(\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
E quindi $(1,1,-1)$ è una base di $\ker f$.

| 3 | |

(c) Determinare tutti i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\{(t, 1+t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Stiamo cercando $f^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ma $f^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_0 + \ker f$, dove $f(\mathbf{v}_0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Possiamo scegliere $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2$ (vedere la risposta alla prima domanda). Quindi:
$f^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_0 + \ker f = \{(0,1,0) + t(1,1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 1+t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

3	

(a) Determinare, se esiste, una base di autovettori di f che non sia ortogonale.

$(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$

Motivazione:

Abbiamo $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-1-x)(3-x)^2$.
Gli autovalori di f sono quindi -1, con molteplicità 1, e -3 con molteplicità 2.
Cerchiamo l'autospazio $E(-1)$. svolgendo i calcoli $(A + I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $a = t, b = 0, c = -t$.
Posto $t = 1$, troviamo che il vettore $\mathbf{v}_1 := (1, 0, -1)$ è una base dell'autospazio $E(-1)$.
Svolgendo i calcoli $(A - 3I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $a = t_1, b = t_2, c = t_1$.
Posto $t_1 = 1, t_2 = 0$, otteniamo $\mathbf{v}_2 := (1, 0, 1)$. Posto $t_1 = 0, t_2 = 1$, otteniamo $\mathbf{v}_3 := (0, 1, 0)$.
Pertanto $\mathbf{v}_2 := (1, 0, 1), \mathbf{v}_3 := (0, 1, 0)$ è una base di $E(3)$. Abbiamo quindi che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è una base di autovettori di f. Osserviamo che questa base è ortogonale. Infatti, poiché la matrice A è simmetrica, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_3$. Inoltre, calcolando il prodotto scalare, notiamo che abbiamo $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 0$ e quindi $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$.
Per avere una base di autovettori che non sia ortogonale, sostituiamo nella base di $E(3)$ il vettore $\mathbf{v}_2$ con il vettore $(1, 1, 1)$ ottenuto ponendo $t_1 = t_2 = 1$. Si ha $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 1 \neq 0$ e quindi $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ non sono ortogonali.
Abbiamo pertanto che $(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ è una base di autovettori non ortogonale.

2	

(b) Determinare, se esiste, una base di autovettori di f che sia ortogonale, ma non ortonormale.

$(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)$

Motivazione:

Nel rispondere alla domanda (a) abbiamo già trovato che $(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)$ è una base ortogonale di autovettori. Non è ortonormale perché $\|(1, 0, 1)\| = \|(1, 0, -1)\| = \sqrt{2}$.

2	

(c) Determinare, se esiste, una base di autovettori di f che sia ortonormale.

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (0, 1, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Motivazione:

Dividendo per la loro norma i vettori della base ortogonale ottenuta in (b) abbiamo la base di autovettori $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (0, 1, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ che è ortonormale.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (-2, \frac{2}{3})$ e il vettore $\mathbf{v} := (3, 4)$

2 (a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela al vettore $\mathbf{v}$ e della retta s simmetrica di r rispetto all'origine del sistema di riferimento.

$r : 4x - 3y + 10 = 0$, $s : 4x - 3y - 10 = 0$

Motivazione:

Una generica retta passante per A ha equazione cartesiana $a(x+2)+b(y-\frac{2}{3}) = 0$. Cerchiamo tra queste la retta r.
Il vettore (a, b) è perpendicolare alla retta. Dal momento che la retta r deve essere parallela a $\mathbf{v}$, prendiamo il vettore $\mathbf{w} := (4, -3)$, perpendicolare a $\mathbf{v}$, e poniamo $a = 4, b = -3$. Otteniamo la seguente equazione cartesiana della retta $r : 4x - 3y + 10 = 0$.
La retta s, simmetrica di r, per definizione, è la retta passante per due punti simmetrici di due punti B e C della retta r. Posto $B := (-1, 2)$ e $C := (-4, -2)$, i loro simmetrici rispetto all'origine sono $B' := (1, -2), C' := (4, 2)$. La retta s passante per essi ha equazione $s : 4x - 3y - 10 = 0$.
Osserviamo che, come era da aspettarsi, le rette r e s sono parallele.

2 (b) Determinare un'equazione della circonferenza γ di centro O e tangente alle rette r e s.

$x^2 + y^2 = 4$

Motivazione:

La circonferenza γ ha equazione $x^2 + y^2 = c^2$ con $c = \mathrm{d}(O, r) = \mathrm{d}(O, s)$.
Abbiamo $\mathrm{d}(O, r) = \frac{10}{5} = 2$. Un'equazione della circonferenza γ è quindi $x^2 + y^2 = 4$.

3 (c) Determinare l'area del parallelogramma individuato dalle rette r e s e dalle rette r' e s' tangenti alla circonferenza γ e parallele all'asse delle y.

$\frac{80}{3}$

Motivazione:

Le rette r' e s', poiché sono parallele all'asse delle y hanno equazione del tipo $x = h$.
Poiché devono essere tangenti alla circonferenza γ, devono avere distanza dall'origine uguale a 2, che è il raggio di γ. Quindi $r' : x = -2$ e $s' : x = 2$.
Il parallelogramma ha quindi come vertici $P_1 := (-2, \frac{2}{3}), P_2 := (2, 6), P_3 := (2, -\frac{2}{3})$ e $P_4 := (-2, -6)$, ottenuti come intersezioni delle quattro rette.
L'area del parallelogramma è data dal prodotto della lunghezza del lato P_1P_2 per l'altezza k passante per P_3. Abbiamo: $\mathrm{d}(P_1, P_2) = \frac{20}{3}$ e $k = \mathrm{d}(P_3, r) = 4$.
L'area del parallelogramma è quindi uguale a $\frac{80}{3}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 2t \end{cases}$ e i punti $A := (1,2,3)$ e $P := (-1,0,1)$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano α contenente la retta r e passante per A.

$x + y - 3 = 0$

Motivazione:

Consideriamo i punti $B := (1,2,0)$ e $C : (2,1,2)$ della retta r.

Il piano α è il piano passante per A, B e C e quindi ha equazione: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

E quindi $\alpha : x + y - 3 = 0$.

2	

(b) Determinare le coordinate del punto P' simmetrico del punto P rispetto al piano α .

$P' = (3,4,1)$

Motivazione:

Consideriamo la retta s passante per A e perpendicolare a α: $s : \begin{cases} x = -1+t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

Abbiamo che $H := \alpha \cap s = (1,2,1)$ è la proiezione ortogonale di A su α. E quindi il punto P' è il punto tale che H è punto medio di P e P'. Quindi $P' = (3,4,1)$.

3	

(c) Determinare l'area del triangolo $PP'A$.

$4\sqrt{2}$

Motivazione:

Dal momento che A è un punto di α e che P' è simmetrico di P rispetto a α, il triangolo $PP'A$ è un triangolo isoscele di base il segmento PP' e altezza il segmento AH. La sua area è quindi uguale a $\frac{\mathrm{d}(P,P')\,\mathrm{d}(A,H)}{2}$.
Abbiamo $\mathrm{d}(P,P') = 4\sqrt{2}$ e $\mathrm{d}(A,H) = 2$.
L'area del triangolo è dunque uguale a $4\sqrt{2}$.