COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi IN STAMPATELLO su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V un sottospazio vettoriale di dimensione 5 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$.
Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione 4 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$.

| 2 | |

(a) Determinare la minima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $V \cap W$.
Dare una base di V e una base di W in modo tale che $\dim(V \cap W)$ sia minima.

$2 \leq \dim(V \cap W)$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann segue:
$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 5 + 4 - \dim(V + W)$. E quindi $\dim V \cap W$ è minima quando $\dim(V + W)$ è massima. Dal momento che $V + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^7$, che ha dimensione uguale a 7, la massima dimensione di $V + W$ è uguale a 7.
In tal caso si ha $\dim(V \cap W) = 5 + 4 - 7 = 2$. Dimostriamo che questo caso è effettivamente possibile dando un esempio. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_7$ la base canonica di $\mathbb{R}^7$.
Sia $V = < \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5 >$ e sia $W = < \mathbf{e}_4, \dots, \mathbf{e}_7 >$. Si ha $V + W = < \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7 > = \mathbb{R}^7$ e $V \cap W = < \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5 >$. Quindi in questo caso si ha $\dim(V + W) = 7$ e $\dim(V \cap W) = 2$.

| 2 | |

(b) Determinare la massima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $V \cap W$.
Dare una base di V e una base di W in modo tale che $\dim(V \cap W)$ sia massima.

$\dim(V \cap W) \leq 4$

Motivazione:

Ragionando come nel caso precedente notiamo che la dimensione di $V \cap W$ è massima quando la dimensione di $V + W$ è minima. Dal momento che $V + W$ contiene sia V che W, si deve avere $\dim(V + W) \geq 5$. Se $\dim(V + W) = 5$ si ha $\dim(V \cap W) = 4$. Dimostriamo che ciò è effettivamente possibile dando un esempio.
Sia $V = < \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5 >$ e sia $W = < \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4 >$. Si ha $V + W = < \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5 > = V$ e $V \cap W = < \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4 > = W$. Quindi in questo caso si ha $\dim(V + W) = 5$ e $\dim(V \cap W) = 4$.

2. Siano dati, al variare del parametro k, i seguenti vettori in $\mathbb{R}^5$:
$\mathbf{v}_1 := (1,0,1,k,0), \mathbf{v}_2 := (0,1,0,0,0), \mathbf{v}_3 := (0,1,1,0,0), \mathbf{v}_4 := (0,1,1,1,1), \mathbf{v}_5 := (1,0,k,1,0)$.

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per cui i cinque vettori dati formano una base di $\mathbb{R}^5$.

$k \neq 1$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei cinque vettori relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$. Si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & k \\ k & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli si trova che $\det A$ si annulla per $k = 1$ e quindi si ha una base per $k \neq 1$.

2	

(b) Posto $k = 0$ e considerati i vettori:
$\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 := 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_4 := \mathbf{v}_1$, calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^5$ da essi generato.

$\dim E = 4$

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente sappiamo che per $k = 0$ i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ formano una base di R^5 e quindi, d'ora in poi, consideriamo coordinate relative a questa base. Sappiamo che si ha $\dim E = \operatorname{rk} B$ dove B è la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ relative alla base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$. Abbiamo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B ha 5 righe 4 colonne si ha $rkB \leq 4$.

Poiché il determinante del minore di B formato dalle prime quattro righe e da tutte le colonne ha determinante non nullo, si ha $\dim E = \operatorname{rk} B = 4$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo così definito $f(a,b,c,d) := a+b+(a-c+d)x+(b+c+d)x^2$.

3

(a) Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3[x]$ e una base dell'immagine di f.

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una base di $f(\mathbb{R}^4)$ è $1, x, x^2$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Il minore B formato dalle tre righe e dalle ultime tre colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 3$. Poiché $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3[x]$ si ha $f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3[x]$, una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

2

(b) Determinare una base del nucleo di f.

Una base di $\ker f$ è $(1,-1,1,0)$

Motivazione:

Per determinare gli elementi del nucleo risolviamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-c+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$$

la cui matrice rappresentativa è A. Sappiamo già che A ha rango 3, quindi il nucleo ha dimensione uguale a 1. Le soluzioni di questo sistema sono $(t,-t,t,0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t=1$.

2

(c) Determinare una base di un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ supplementare di $\ker f$.

$(1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0)$

Motivazione:

Dobbiamo determinare tre vettori tali che, insieme con il vettore scelto come base di $\ker f$, formino una base di $\mathbb{R}^4$.

Scegliamo i vettori $(1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0)$, infatti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo.

4. Sia data la matrice a coefficienti reali:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

| 3 | |

(a) Determinare, se esistono, una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che si abbia $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

La matrice A è triangolare e quindi i suoi autovalori sono 1, 2 e 3, cioè gli elementi della sua diagonale principale. Gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile. Una sua diagonalizzata è la matrice diagonale D avente sulla diagonale principale 1, 2 e 3. Per determinare gli autovettori con autovalore 1, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$. $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$. Le soluzioni sono $(t, -2t, \frac{5}{2}t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.
Prendendo, per esempio, $t = 2$, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_1 := (2, -4, 5)$.
Operando in modo analogo per la ricerca di un autovettore con autovalore 2, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_2 := (0, 1, -4)$.
Osservando la terza colonna della matrice A vediamo che il vettore $\mathbf{v}_3 := (0, 0, 1)$ è autovettore con autovalore 3. Da tutto ciò segue che una matrice M verificante le condizioni date è $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(b) Determinare, se esiste, una matrice N, tale che si abbia $\det N = -\det M$ e $D = N^{-1}AN$, dove M e D sono le matrici ottenute nella risposta (a).

$$N := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Se nella matrice M moltiplichiamo per -1 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice N tale che $\det N = -\det M$. Inoltre il vettore $-\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice N verifica le proprietà richieste.

| 2 | |

(c) Determinare, se esiste, una matrice U, tale che si abbia $\det U = 1$ e $D = U^{-1}AU$, dove D è la matrice ottenuta nella risposta (a).

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Si ha $\det M = 2$. Se nella matrice M dividiamo per 2 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice U tale che $\det U = 1$. Inoltre il vettore $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice U verifica le proprietà richieste.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (-1, 8)$ e $B := (3, 2)$ e la retta $r : 3x + 2y = 0$.

2

(a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e avente il centro K su r.

$\gamma : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$

Motivazione:

Dal momento che la circonferenza γ passa per A e B, il suo centro deve appartenere all'asse s del segmento AB. Detto M il punto medio di AB si ha $M = (1, 5)$. I parametri direttori della retta passante per A e B sono: $(3 - (-1), 2 - 8) = (4, -6)$ e quindi possiamo prendere come vettore direttore di s il vettore $\mathbf{v} := (2, -3)$. Il vettore $\mathbf{u} := (3, 2)$ è ad esso perpendicolare.
L'asse s ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$.
Il punto K deve appartenere alla retta r. Sostituendo quindi le coordinate del punto generico di s nell'equazione cartesiana di r otteniamo $3(1 + 3t) + 2(5 + 2t) = 0$, da cui segue $t = -1$ e quindi $K = (-2, 3)$. Il raggio di γ è uguale a $\mathrm{d}(K, A) = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (3 - 8)^2} = \sqrt{26}$.
Segue $\gamma : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$.

3

(b) Scrivere l'equazione della circonferenza γ' simmetrica della circonferenza γ rispetto alla retta passante per A e B e verificare se, detto K' il centro di γ', il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

$\gamma' : (x-4)^2+(y-7)^2 = 26$. Il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Motivazione:

La circonferenza γ' ha il centro nel punto K' simmetrico del punto K rispetto alla retta passante per A e B e raggio uguale al raggio di γ.
Il punto K' è quindi il simmetrico del punto K rispetto alla proiezione ortogonale H del punto K sulla retta passante per A e B. Ma noi sappiamo che K appartiene all'asse del segmento AB e quindi $H = M = (1, 5)$ e quindi $K' = (4, 7)$. Si ha perciò $\gamma' : (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 26$.
Dimostriamo ora che il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.
Per quel che abbiamo visto, il punto M è punto medio dei punti A e B e dei punti K e K'.
Da ciò segue che le diagonali del quadrilatero $KAK'B$ si intersecano nel loro punto medio.
E quindi il quadrilatero è un parallelogramma.
Le diagonali AB e KK' appartengono a rette tra loro ortogonali e quindi il parallelogramma o è un rombo o è un quadrato. Infine, si ha $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(K, K') = \sqrt{52}$. Il parallelogramma è quindi un quadrato.

2

(c) Determinare le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ passanti per K'.

$x + 5y - 39 = 0$ e $5x - y - 13 = 0$

Motivazione:

Per quel che abbiamo detto prima la retta passante per K' e A ha distanza da K uguale al raggio della circonferenza γ e quindi è una delle tangenti cercate. Essa ha equazione $x + 5y - 39 = 0$.
Per le stesse ragioni l'altra tangente è la retta passante per K' e B. Essa ha equazione $5x - y - 13 = 0$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, -2, 2)$ e le rette $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

2

(a) Verificare se le rette r e s sono sghembe.

Sì, le due rette sono sghembe.

Motivazione:

I parametri direttori delle rette r e s sono rispettivamente $(-1, 2, 1)$ e $(2, -1, 1)$. Dal momento che essi non sono proporzionali, le due rette non sono parallele.
Per verificare se sono sghembe, cerchiamo i loro eventuali punti di intersezione risolvendo il sistema $\begin{cases} 1 - t &= 1 + 2t' \\ 1 + 2t = -t' \\ t &= t' \end{cases}$.
Dal momento che il sistema non ha chiaramente soluzioni, le due rette sono sghembe.

2

(b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A e parallelo alle rette r e s.

$\pi : x + y - z + 3 = 0$

Motivazione:

Il piano π deve essere parallelo ai vettori direttori delle due rette e deve passare per A. Una sua equazione cartesiana è quindi data da: $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
E quindi $\pi : x + y - z + 3 = 0$.

3

(c) Determinare equazioni parametriche della retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

$$r' : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} - t \\ y = -\dfrac{7}{3} + 2t \\ z = \dfrac{10}{3} + t \end{cases}.$$

Motivazione:

Dal momento che la retta r è parallela al piano π, la retta r' è parallela alla retta r. Dal momento che la retta r passa per il punto $P := (1, 1, 0)$, la retta r' passa per il punto P' simmetrico del punto P rispetto al piano π.
Per determinare P', consideriamo la retta u passante per P e perpendicolare a π. Si ha ovviamente: $u : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$. Cerchiamo $H = \pi \cap u$ inserendo le coordinate del punto generico di u nell'equazione di π e determinando t. Otteniamo $t = -\frac{5}{3}$, da cui $H = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.
Quindi $P' = (-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{10}{3})$. La retta r' ha quindi equazioni parametriche $r' : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} - t \\ y = -\dfrac{7}{3} + 2t \\ z = \dfrac{10}{3} + t \end{cases}$.

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi IN STAMPATELLO su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E un sottospazio vettoriale di dimensione 6 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^8$.
   Sia F un sottospazio vettoriale di dimensione 4 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^8$.

2 | (a) Determinare la minima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $E \cap F$.
Dare una base di E e una base di F in modo tale che $\dim(E \cap F)$ sia minima.

$2 \leq \dim(E \cap F)$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann segue:
$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 6 + 4 - \dim(E + F)$. E quindi $\dim E \cap F$ è minima quando $\dim(E + F)$ è massima. Dal momento che $E + F$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^8$, che ha dimensione uguale a 8, la massima dimensione di $E + F$ è uguale a 8.
In tal caso si ha $\dim(E \cap F) = 6 + 4 - 8 = 2$. Dimostriamo che questo caso è effettivamente possibile dando un esempio. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_8$ la base canonica di $\mathbb{R}^8$.
Sia $E =< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6 >$ e sia $F =< \mathbf{e}_5, \dots, \mathbf{e}_8 >$. Si ha $E + F =< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_8 >= \mathbb{R}^8$ e $E \cap F =< \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6 >$. Quindi in questo caso si ha $\dim(E + F) = 8$ e $\dim(E \cap F) = 2$.

2 | (b) Determinare la massima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $E \cap F$.
Dare una base di E e una base di F in modo tale che $\dim(E \cap F)$ sia massima.

$\dim(E \cap F) \leq 4$

Motivazione:

Ragionando come nel caso precedente notiamo che la dimensione di $E \cap F$ è massima quando la dimensione di $E + F$ è minima. Dal momento che $E + F$ contiene sia E che F, si deve avere $\dim(E + F) \geq 6$. Se $\dim(E + F) = 6$ si ha $\dim(E \cap F) = 4$. Dimostriamo che ciò è effettivamente possibile dando un esempio.
Sia $E =< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6 >$ e sia $F =< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4 >$. Si ha $E + F =< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6 >= E$ e $E \cap F =< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4 >= F$. Quindi in questo caso si ha $\dim(E + F) = 6$ e $\dim(E \cap F) = 4$.

2. Siano dati, al variare del parametro k, i seguenti vettori in $\mathbb{R}^5$:
$\mathbf{v}_1 := (0,1,0,0,0), \mathbf{v}_2 := (1,0,1,k,0), \mathbf{v}_3 := (0,1,1,1,1), \mathbf{v}_4 := (0,1,1,0,0), \mathbf{v}_5 := (1,0,k,1,0)$.

| 2 | |

(a) Determinare tutti i valori di k per cui i cinque vettori dati formano una base di $\mathbb{R}^5$.

$k \neq 1$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei cinque vettori relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$. Si ha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli si trova che $\det A$ si annulla per $k = 1$ e quindi si ha una base per $k \neq 1$.

| 2 | |

(b) Posto $k = 0$ e considerati i vettori:
$\mathbf{u}_1 := 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{u}_2 := -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 := -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_4 := \mathbf{v}_1$, calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^5$ da essi generato.

$\dim E = 4$

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente sappiamo che per $k = 0$ i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ formano una base di R^5 e quindi, d'ora in poi, consideriamo coordinate relative a questa base. Sappiamo che si ha $\dim E = \operatorname{rk} B$ dove B è la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ relative alla base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$. Abbiamo $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B ha 5 righe 4 colonne si ha $rkB \leq 4$.

Poiché il determinante del minore di B formato dalle prime quattro righe e da tutte le colonne ha determinante non nullo, si ha $\dim E = \operatorname{rk} B = 4$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo così definito $f(a,b,c,d) := b + c + (-a + c + d)x + (a + b + d)x^2$.

| 3 | |

(a) Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3[x]$ e una base dell'immagine di f.

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ una base di $f(\mathbb{R}^4)$ è $1, x, x^2$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Il minore B formato dalle tre righe e dalle ultime tre colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 3$. Poiché $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3[x]$ si ha $f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3[x]$, una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

| 2 | |

(b) Determinare una base del nucleo di f.

Una base di $\ker f$ è $(1, -1, 1, 0)$

Motivazione:

Per determinare gli elementi del nucleo risolviamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ -a + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

la cui matrice rappresentativa è A. Sappiamo già che A ha rango 3, quindi il nucleo ha dimensione uguale a 1. Le soluzioni di questo sistema sono $(t, -t, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

| 2 | |

(c) Determinare una base di un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ supplementare di $\ker f$.

$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$

Motivazione:

Dobbiamo determinare tre vettori tali che, insieme con il vettore scelto come base di $\ker f$, formino una base di $\mathbb{R}^4$.

Scegliamo i vettori $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$, infatti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo.

4. Sia data la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

3 (a) Determinare, se esistono, una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che si abbia $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

La matrice A è triangolare e quindi i suoi autovalori sono 1, 4 e 5, cioè gli elementi della sua diagonale principale. Gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile. Una sua diagonalizzata è la matrice diagonale D avente sulla diagonale principale 1, 4 e 5. Per determinare gli autovettori con autovalore 1, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$. $\begin{cases} 0 & = 0 \\ 6x + 3y & = 0 \\ 6x + 8y + 4z = 0 \end{cases}$. Le soluzioni sono $(t, -2t, \frac{5}{2}t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.
Prendendo, per esempio, $t = 2$, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_1 := (2, -4, 5)$.
Operando in modo analogo per la ricerca di un autovettore con autovalore 4, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_2 := (0, 1, -8)$.
Osservando la terza colonna della matrice A vediamo che il vettore $\mathbf{v}_3 := (0, 0, 1)$ è autovettore con autovalore 5. Da tutto ciò segue che una matrice M verificante le condizioni date è $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

2 (b) Determinare, se esiste, una matrice N, tale che si abbia $\det N = -\det M$ e $D = N^{-1}AN$, dove M e D sono le matrici ottenute nella risposta (a).

$$N := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Se nella matrice M moltiplichiamo per -1 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice N tale che $\det N = -\det M$. Inoltre il vettore $-\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice N verifica le proprietà richieste.

2 (c) Determinare, se esiste, una matrice U, tale che si abbia $\det U = 1$ e $D = U^{-1}AU$, dove D è la matrice ottenuta nella risposta (a).

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Si ha $\det M = 2$. Se nella matrice M dividiamo per 2 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice U tale che $\det U = 1$. Inoltre il vettore $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice U verifica le proprietà richieste.

COGNOME......................NOME......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (8, -1)$ e $B := (2, 3)$ e la retta $r : 2x + 3y = 0$.

| 2 | |

(a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e avente il centro K su r.

$\gamma : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 26$

Motivazione:

Dal momento che la circonferenza γ passa per A e B, il suo centro deve appartenere all'asse s del segmento AB. Detto M il punto medio di AB si ha $M = (5, 1)$. I parametri direttori della retta passante per A e B sono: $(2 - 8, 3 - (-1)) = (-6, 4)$ e quindi possiamo prendere come vettore direttore di s il vettore $\mathbf{v} := (-3, 2)$. Il vettore $\mathbf{u} := (2, 3)$ è ad esso perpendicolare.

L'asse s ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$.

Il punto K deve appartenere alla retta r. Sostituendo quindi le coordinate del punto generico di s nell'equazione cartesiana di r otteniamo $2(5 + 2t) + 3(1 + 3t) = 0$, da cui segue $t = -1$ e quindi $K = (3, -2)$. Il raggio di γ è uguale a $\mathrm{d}(K, A) = \sqrt{(3 - 8)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{26}$. Segue $\gamma : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 26$.

| 3 | |

(b) Scrivere l'equazione della circonferenza γ' simmetrica della circonferenza γ rispetto alla retta passante per A e B e verificare se, detto K' il centro di γ', il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

$\gamma' : (x-7)^2+(y-4)^2 = 26$. Il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Motivazione:

La circonferenza γ' ha il centro nel punto K' simmetrico del punto K rispetto alla retta passante per A e B e raggio uguale al raggio di γ.

Il punto K' è quindi il simmetrico del punto K rispetto alla proiezione ortogonale H del punto K sulla retta passante per A e B. Ma noi sappiamo che K appartiene all'asse del segmento AB e quindi $H = M = (5, 1)$ e quindi $K' = (7, 4)$. Si ha perciò $\gamma' : (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 26$.

Dimostriamo ora che il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Per quel che abbiamo visto, il punto M è punto medio dei punti A e B e dei punti K e K'. Da ciò segue che le diagonali del quadrilatero $KAK'B$ si intersecano nel loro punto medio. E quindi il quadrilatero è un parallelogramma.

Le diagonali AB e KK' appartengono a rette tra loro ortogonali e quindi il parallelogramma o è un rombo o è un quadrato. Infine, si ha $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(K, K') = \sqrt{52}$. Il parallelogramma è quindi un quadrato.

| 2 | |

(c) Determinare le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ passanti per K'.

$5x + y - 39 = 0$ e $x - 5y + 13 = 0$

Motivazione:

Per quel che abbiamo detto prima la retta passante per K' e A ha distanza da K uguale al raggio della circonferenza γ e quindi è una delle tangenti cercate. Essa ha equazione $5x + y - 39 = 0$.

Per le stesse ragioni l'altra tangente è la retta passante per K' e B. Essa ha equazione $x - 5y + 13 = 0$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (-2, 1, 2)$ e le rette $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

2	

(a) Verificare se le rette r e s sono sghembe.

Sì, le due rette sono sghembe.

Motivazione:

I parametri direttori delle rette r e s sono rispettivamente $(2, -1, 1)$ e $(-1, 2, 1)$. Dal momento che essi non sono proporzionali, le due rette non sono parallele.
Per verificare se sono sghembe, cerchiamo i loro eventuali punti di intersezione risolvendo il sistema $\begin{cases} 1 + 2t = -t' \\ 1 - t \;= 1 + 2t' \\ t \quad\;\; = t' \end{cases}$.
Dal momento che il sistema non ha chiaramente soluzioni, le due rette sono sghembe.

2	

(b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A e parallelo alle rette r e s.

$\pi : x + y - z + 3 = 0$

Motivazione:

Il piano π deve essere parallelo ai vettori direttori delle due rette e deve passare per A. Una sua equazione cartesiana è quindi data da: $\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$
E quindi $\pi : x + y - z + 3 = 0$.

3	

(c) Determinare equazioni parametriche della retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

$$r' : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} + 2t \\ y = \quad -\dfrac{7}{3} - t \\ z = \quad \dfrac{10}{3} + t \end{cases}$$

Motivazione:

Dal momento che la retta r è parallela al piano π, la retta r' è parallela alla retta r. Dal momento che la retta r passa per il punto $P := (1, 1, 0)$, la retta r' passa per il punto P' simmetrico del punto P rispetto al piano π.
Per determinare P', consideriamo la retta u passante per P e perpendicolare a π. Si ha ovviamente: $u : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = \quad -t \end{cases}$. Cerchiamo $H = \pi \cap u$ inserendo le coordinate del punto generico di u nell'equazione di π e determinando t. Otteniamo $t = -\frac{5}{3}$, da cui $H = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.
Quindi $P' = (-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{10}{3})$. La retta r' ha quindi equazioni parametriche $r' : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} + 2t \\ y = \quad -\dfrac{7}{3} - t \\ z = \quad \dfrac{10}{3} + t \end{cases}$

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi IN STAMPATELLO su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V un sottospazio vettoriale di dimensione 4 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^8$.
Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione 6 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^8$.

2 (a) Determinare la minima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $V \cap W$.
Dare una base di V e una base di W in modo tale che $\dim(V \cap W)$ sia minima.

$2 \leq \dim(V \cap W)$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann segue:
$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 4 + 6 - \dim(V + W)$. E quindi $\dim V \cap W$ è minima quando $\dim(V + W)$ è massima. Dal momento che $V + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^8$, che ha dimensione uguale a 8, la massima dimensione di $V + W$ è uguale a 8.
In tal caso si ha $\dim(V \cap W) = 4 + 6 - 8 = 2$. Dimostriamo che questo caso è effettivamente possibile dando un esempio. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_8$ la base canonica di $\mathbb{R}^8$.
Sia $V =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4 >$ e sia $W =< \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_8 >$. Si ha $V + W =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_8 >= \mathbb{R}^8$ e $V \cap W =< \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 >$. Quindi in questo caso si ha $\dim(V + W) = 8$ e $\dim(V \cap W) = 2$.

2 (b) Determinare la massima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $V \cap W$.
Dare una base di V e una base di W in modo tale che $\dim(V \cap W)$ sia massima.

$\dim(V \cap W) \leq 4$

Motivazione:

Ragionando come nel caso precedente notiamo che la dimensione di $V \cap W$ è massima quando la dimensione di $V + W$ è minima. Dal momento che $V + W$ contiene sia V che W, si deve avere $\dim(V + W) \geq 6$. Se $\dim(V + W) = 6$ si ha $\dim(V \cap W) = 4$. Dimostriamo che ciò è effettivamente possibile dando un esempio.
Sia $V =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4 >$ e sia $W =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6 >$. Si ha $V + W =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6 >= V$ e $V \cap W =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4 >= W$. Quindi in questo caso si ha $\dim(V + W) = 6$ e $\dim(V \cap W) = 4$.

2. Siano dati, al variare del parametro k, i seguenti vettori in $\mathbb{R}^5$:
$\mathbf{v}_1 := (0,1,1,0,0), \mathbf{v}_2 := (1,0,k,1,0), \mathbf{v}_3 := (1,0,1,k,0), \mathbf{v}_4 := (0,1,1,1,1), \mathbf{v}_5 := (0,1,0,0,0)$.

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per cui i cinque vettori dati formano una base di $\mathbb{R}^5$.

$k \neq 1$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei cinque vettori relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$. Si ha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli si trova che $\det A$ si annulla per $k = 1$ e quindi si ha una base per $k \neq 1$.

2	

(b) Posto $k = 0$ e considerati i vettori:
$\mathbf{u}_1 := 2\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{u}_2 := 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 := -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_4 := \mathbf{v}_1$, calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^5$ da essi generato.

$\dim E = 4$

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente sappiamo che per $k = 0$ i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ formano una base di R^5 e quindi, d'ora in poi, consideriamo coordinate relative a questa base. Sappiamo che si ha $\dim E = \operatorname{rk} B$ dove B è la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ relative alla base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$. Abbiamo $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B ha 5 righe 4 colonne si ha $rkB \leq 4$.
Poiché il determinante del minore di B formato dalle prime quattro righe e da tutte le colonne ha determinante non nullo, si ha $\dim E = \operatorname{rk} B = 4$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo così definito $f(a, b, c, d) := a + b + (b - c + d)x + (a + c + d)x^2$.

3	

(a) Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3[x]$ e una base dell'immagine di f.

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una base di $f(\mathbb{R}^4)$ è $1, x, x^2$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Il minore B formato dalle tre righe e dalle ultime tre colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 3$. Poiché $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3[x]$ si ha $f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3[x]$, una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

2	

(b) Determinare una base del nucleo di f.

Una base di $\ker f$ è $(-1, 1, 1, 0)$

Motivazione:

Per determinare gli elementi del nucleo risolviamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b - c + d = 0 \\ a + c + d = 0 \end{cases}$$

la cui matrice rappresentativa è A. Sappiamo già che A ha rango 3, quindi il nucleo ha dimensione uguale a 1. Le soluzioni di questo sistema sono $(-t, t, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

2	

(c) Determinare una base di un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ supplementare di $\ker f$.

$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$

Motivazione:

Dobbiamo determinare tre vettori tali che, insieme con il vettore scelto come base di $\ker f$, formino una base di $\mathbb{R}^4$.

Scegliamo i vettori $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$, infatti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo.

4. Sia data la matrice a coefficienti reali:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

| 3 | |

(a) Determinare, se esistono, una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che si abbia $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

La matrice A è triangolare e quindi i suoi autovalori sono 1, 2 e 5, cioè gli elementi della sua diagonale principale. Gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile. Una sua diagonalizzata è la matrice diagonale D avente sulla diagonale principale 1, 2 e 5. Per determinare gli autovettori con autovalore 1, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$. $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$. Le soluzioni sono $(t, -2t, \frac{5}{4}t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.
Prendendo, per esempio, $t = 4$, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_1 := (4, -8, 5)$.
Operando in modo analogo per la ricerca di un autovettore con autovalore 2, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_2 := (0, 3, -4)$.
Osservando la terza colonna della matrice A vediamo che il vettore $\mathbf{v}_3 := (0, 0, 1)$ è autovettore con autovalore 3. Da tutto ciò segue che una matrice M verificante le condizioni date è $M := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(b) Determinare , se esiste, una matrice N, tale che si abbia $\det N = -\det M$ e $D = N^{-1}AN$, dove M e D sono le matrici ottenute nella risposta (a).

$$N := \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Se nella matrice M moltiplichiamo per -1 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice N tale che $\det N = -\det M$. Inoltre il vettore $-\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice N verifica le proprietà richieste.

| 2 | |

(c) Determinare, se esiste, una matrice U, tale che si abbia $\det U = 1$ e $D = U^{-1}AU$, dove D è la matrice ottenuta nella risposta (a).

$$U := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -3 & 0 \\ \frac{5}{12} & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Si ha $\det M = 12$. Se nella matrice M dividiamo per 12 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice U tale che $\det U = 1$. Inoltre il vettore $\frac{1}{12}\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice U verifica le proprietà richieste.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, -8)$ e $B := (-3, -2)$ e la retta $r : 3x + 2y = 0$.

2	

(a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e avente il centro K su r.

$\boxed{\gamma : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 26}$

Motivazione:

Dal momento che la circonferenza γ passa per A e B, il suo centro deve appartenere all'asse s del segmento AB. Detto M il punto medio di AB si ha $M = (-1, -5)$. I parametri direttori della retta passante per A e B sono: $(-3-1, -2-(-8)) = (-4, 6)$ e quindi possiamo prendere come vettore direttore di s il vettore $\mathbf{v} := (-2, 3)$. Il vettore $\mathbf{u} := (3, 2)$ è ad esso perpendicolare. L'asse s ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -5 + 2t \end{cases}$.

Il punto K deve appartenere alla retta r. Sostituendo quindi le coordinate del punto generico di s nell'equazione cartesiana di r otteniamo $3(-1+3t)+2(-5+2t) = 0$, da cui segue $t = 1$ e quindi $K = (2, -3)$. Il raggio di γ è uguale a $\mathrm{d}(K, A) = \sqrt{(2-1)^2 + (-3+8)^2} = \sqrt{26}$. Segue $\gamma : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 26$.

3	

(b) Scrivere l'equazione della circonferenza γ' simmetrica della circonferenza γ rispetto alla retta passante per A e B e verificare se, detto K' il centro di γ', il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

$\gamma' : (x+4)^2+(y+7)^2 = 26$. Il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Motivazione:

La circonferenza γ' ha il centro nel punto K' simmetrico del punto K rispetto alla retta passante per A e B e raggio uguale al raggio di γ.
Il punto K' è quindi il simmetrico del punto K rispetto alla proiezione ortogonale H del punto K sulla retta passante per A e B. Ma noi sappiamo che K appartiene all'asse del segmento AB e quindi $H = M = (-1, -5)$ e quindi $K' = (-4, -7)$. Si ha perciò $\gamma' : (x+4)^2 + (y+7)^2 = 26$.
Dimostriamo ora che il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.
Per quel che abbiamo visto, il punto M è punto medio dei punti A e B e dei punti K e K'. Da ciò segue che le diagonali del quadrilatero $KAK'B$ si intersecano nel loro punto medio. E quindi il quadrilatero è un parallelogramma.
Le diagonali AB e KK' appartengono a rette tra loro ortogonali e quindi il parallelogramma o è un rombo o è un quadrato. Infine, si ha $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(K, K') = \sqrt{52}$. Il parallelogramma è quindi un quadrato.

2	

(c) Determinare le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ passanti per K'.

$x + 5y + 39 = 0$ e $5x - y + 13 = 0$

Motivazione:

Per quel che abbiamo detto prima la retta passante per K' e A ha distanza da K uguale al raggio della circonferenza γ e quindi è una delle tangenti cercate. Essa ha equazione $x + 5y + 39 = 0$.
Per le stesse ragioni l'altra tangente è la retta passante per K' e B. Essa ha equazione $5x - y + 13 = 0$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, 2, -2)$ e le rette $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$

| 2 | |

(a) Verificare se le rette r e s sono sghembe.

Sì, le due rette sono sghembe.

Motivazione:

I parametri direttori delle rette r e s sono rispettivamente $(-1, 1, 2)$ e $(2, 1, -11)$. Dal momento che essi non sono proporzionali, le due rette non sono parallele.
Per verificare se sono sghembe, cerchiamo i loro eventuali punti di intersezione risolvendo il sistema $\begin{cases} 1 - t &= 1 + 2t' \\ t &= t' \\ 1 + 2t &= -t' \end{cases}$.
Dal momento che il sistema non ha chiaramente soluzioni, le due rette sono sghembe.

| 2 | |

(b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A e parallelo alle rette r e s.

$\pi : x - y + z + 3 = 0$

Motivazione:

Il piano π deve essere parallelo ai vettori direttori delle due rette e deve passare per A. Una sua equazione cartesiana è quindi data da: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$
E quindi $\pi : x - y + z + 3 = 0$.

| 3 | |

(c) Determinare equazioni parametriche della retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

$$r' : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} - t \\ y = \dfrac{10}{3} + t \\ z = -\dfrac{7}{3} + 2t \end{cases}$$

Motivazione:

Dal momento che la retta r è parallela al piano π, la retta r' è parallela alla retta r. Dal momento che la retta r passa per il punto $P := (1, 0, 1)$, la retta r' passa per il punto P' simmetrico del punto P rispetto al piano π.
Per determinare P', consideriamo la retta u passante per P e perpendicolare a π. Si ha ovviamente: $u : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Cerchiamo $H = \pi \cap u$ inserendo le coordinate del punto generico di u nell'equazione di π e determinando t. Otteniamo $t = -\frac{5}{3}$, da cui $H = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$.
Quindi $P' = (-\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{5}{3})$. La retta r' ha quindi equazioni parametriche $r' : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} - t \\ y = \dfrac{10}{3} + t \\ z = -\dfrac{7}{3} + 2t \end{cases}$

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi IN STAMPATELLO su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E un sottospazio vettoriale di dimensione 7 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^9$.
Sia F un sottospazio vettoriale di dimensione 4 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^9$.

2

(a) Determinare la minima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $E \cap F$.
Dare una base di E e una base di F in modo tale che $\dim(E \cap F)$ sia minima.

$2 \leq \dim(E \cap F)$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann segue:
$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 7 + 4 - \dim(E + F)$. E quindi $\dim E \cap F$ è minima quando $\dim(E + F)$ è massima. Dal momento che $E + F$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^9$, che ha dimensione uguale a 9, la massima dimensione di $E + F$ è uguale a 9.
In tal caso si ha $\dim(E \cap F) = 7 + 4 - 9 = 2$. Dimostriamo che questo caso è effettivamente possibile dando un esempio. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_9$ la base canonica di $\mathbb{R}^9$.
Sia $E =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7 >$ e sia $F =< \mathbf{e}_6, \ldots, \mathbf{e}_9 >$. Si ha $E + F =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_9 >= \mathbb{R}^9$ e $E \cap F =< \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7 >$. Quindi in questo caso si ha $\dim(E + F) = 9$ e $\dim(E \cap F) = 2$.

2

(b) Determinare la massima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $E \cap F$.
Dare una base di E e una base di F in modo tale che $\dim(E \cap F)$ sia massima.

$\dim(E \cap F) \leq 4$

Motivazione:

Ragionando come nel caso precedente notiamo che la dimensione di $E \cap F$ è massima quando la dimensione di $E + F$ è minima. Dal momento che $E + F$ contiene sia E che F, si deve avere $\dim(E + F) \geq 7$. Se $\dim(E + F) = 7$ si ha $\dim(E \cap F) = 4$. Dimostriamo che ciò è effettivamente possibile dando un esempio.
Sia $E =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7 >$ e sia $F =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4 >$. Si ha $E + F =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7 >= E$ e $E \cap F =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4 >= F$. Quindi in questo caso si ha $\dim(E + F) = 7$ e $\dim(E \cap F) = 4$.

2. Siano dati, al variare del parametro k, i seguenti vettori in $\mathbb{R}^5$:
$\mathbf{v}_1 := (1,0,1,k,0), \mathbf{v}_2 := (0,1,1,1,1), \mathbf{v}_3 := (1,0,k,1,0), \mathbf{v}_4 := (0,1,0,0,0), \mathbf{v}_5 := (0,1,1,0,0)$.

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per cui i cinque vettori dati formano una base di $\mathbb{R}^5$.

$k \neq 1$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei cinque vettori relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$. Si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli si trova che $\det A$ si annulla per $k = 1$ e quindi si ha una base per $k \neq 1$.

2	

(b) Posto $k = 0$ e considerati i vettori:
$\mathbf{u}_1 := -\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{u}_2 := 2\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_4 := \mathbf{v}_1$, calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^5$ da essi generato.

$\dim E = 4$

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente sappiamo che per $k = 0$ i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ formano una base di R^5 e quindi, d'ora in poi, consideriamo coordinate relative a questa base. Sappiamo che si ha $\dim E = \operatorname{rk} B$ dove B è la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ relative alla base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$. Abbiamo $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B ha 5 righe 4 colonne si ha $rkB \leq 4$.

Poiché il determinante del minore di B formato dalle prime quattro righe e da tutte le colonne ha determinante non nullo, si ha $\dim E = \operatorname{rk} B = 4$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo così definito $f(a,b,c,d) := a + c + (a - b + d)x + (b + c + d)x^2$.

3	

(a) Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3[x]$ e una base dell'immagine di f.

$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una base di $f(\mathbb{R}^4)$ è $1, x, x^2$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Il minore B formato dalle tre righe e dalle ultime tre colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 3$. Poiché $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3[x]$ si ha $f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3[x]$, una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

2	

(b) Determinare una base del nucleo di f.

Una base di $\ker f$ è $(1, 1, -1, 0)$

Motivazione:

Per determinare gli elementi del nucleo risolviamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a - b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

la cui matrice rappresentativa è A. Sappiamo già che A ha rango 3, quindi il nucleo ha dimensione uguale a 1. Le soluzioni di questo sistema sono $(t, t, -t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

2	

(c) Determinare una base di un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ supplementare di $\ker f$.

$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$

Motivazione:

Dobbiamo determinare tre vettori tali che, insieme con il vettore scelto come base di $\ker f$, formino una base di $\mathbb{R}^4$.

Scegliamo i vettori $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$, infatti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo.

4. Sia data la matrice a coefficienti reali:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 |

(a) Determinare, se esistono, una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che si abbia $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

La matrice A è triangolare e quindi i suoi autovalori sono 1, 4 e 3, cioè gli elementi della sua diagonale principale. Gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile. Una sua diagonalizzata è la matrice diagonale D avente sulla diagonale principale 1, 4 e 3. Per determinare gli autovettori con autovalore 1, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$. $\begin{cases} 0 = 0 \\ 6x + 3y = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$. Le soluzioni sono $(t, -2t, \frac{5}{2}t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.
Prendendo, per esempio, $t = 2$, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_1 := (2, -4, 5)$.
Operando in modo analogo per la ricerca di un autovettore con autovalore 4, otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}_2 := (0, 1, 4)$.
Osservando la terza colonna della matrice A vediamo che il vettore $\mathbf{v}_3 := (0, 0, 1)$ è autovettore con autovalore 3. Da tutto ciò segue che una matrice M verificante le condizioni date è $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2 |

(b) Determinare, se esiste, una matrice N, tale che si abbia $\det N = -\det M$ e $D = N^{-1}AN$, dove M e D sono le matrici ottenute nella risposta (a).

$$N := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Se nella matrice M moltiplichiamo per -1 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice N tale che $\det N = -\det M$. Inoltre il vettore $-\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice N verifica le proprietà richieste.

2 |

(c) Determinare , se esiste, una matrice U, tale che si abbia $\det U = 1$ e $D = U^{-1}AU$, dove D è la matrice ottenuta nella risposta (a).

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Si ha $\det M = 2$. Se nella matrice M dividiamo per 2 gli elementi della prima colonna otteniamo una matrice U tale che $\det U = 1$. Inoltre il vettore $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$ è ovviamente un autovettore con autovalore uguale a 1. E quindi la matrice U verifica le proprietà richieste.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (-8, 1)$ e $B := (-2, -3)$ e la retta $r : 2x + 3y = 0$.

| 2 | |

(a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e avente il centro K su r.

$\gamma : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 26$

Motivazione:

Dal momento che la circonferenza γ passa per A e B, il suo centro deve appartenere all'asse s del segmento AB. Detto M il punto medio di AB si ha $M = (-5, -1)$. I parametri direttori della retta passante per A e B sono: $(-2 - (-8), -3 - 1) = (6, -4)$ e quindi possiamo prendere come vettore direttore di s il vettore $\mathbf{v} := (3, -2)$. Il vettore $\mathbf{u} := (2, 3)$ è ad esso perpendicolare. L'asse s ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$.

Il punto K deve appartenere alla retta r. Sostituendo quindi le coordinate del punto generico di s nell'equazione cartesiana di r otteniamo $2(-5+2t)+3(-1+3t) = 0$, da cui segue $t = 1$ e quindi $K = (-3, 2)$. Il raggio di γ è uguale a $\mathrm{d}(K, A) = \sqrt{(-3 + 8)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{26}$. Segue $\gamma : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 26$.

| 3 | |

(b) Scrivere l'equazione della circonferenza γ' simmetrica della circonferenza γ rispetto alla retta passante per A e B e verificare se, detto K' il centro di γ', il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

$\gamma' : (x+7)^2+(y+4)^2 = 26$. Il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Motivazione:

La circonferenza γ' ha il centro nel punto K' simmetrico del punto K rispetto alla retta passante per A e B e raggio uguale al raggio di γ.

Il punto K' è quindi il simmetrico del punto K rispetto alla proiezione ortogonale H del punto K sulla retta passante per A e B. Ma noi sappiamo che K appartiene all'asse del segmento AB e quindi $H = M = (-5, -1)$ e quindi $K' = (-7, -4)$. Si ha perciò $\gamma' : (x + 7)^2 + (y + 4)^2 = 26$.

Dimostriamo ora che il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Per quel che abbiamo visto, il punto M è punto medio dei punti A e B e dei punti K e K'.

Da ciò segue che le diagonali del quadrilatero $KAK'B$ si intersecano nel loro punto medio.

E quindi il quadrilatero è un parallelogramma.

Le diagonali AB e KK' appartengono a rette tra loro ortogonali e quindi il parallelogramma o è un rombo o è un quadrato. Infine, si ha $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(K, K') = \sqrt{52}$. Il parallelogramma è quindi un quadrato.

| 2 | |

(c) Determinare le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ passanti per K'.

$5x + y + 39 = 0$ e $x - 5y - 13 = 0$

Motivazione:

Per quel che abbiamo detto prima la retta passante per K' e A ha distanza da K uguale al raggio della circonferenza γ e quindi è una delle tangenti cercate. Essa ha equazione $5x + y + 39 = 0$.

Per le stesse ragioni l'altra tangente è la retta passante per K' e B. Essa ha equazione $x - 5y - 13 = 0$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (2, -2, 1)$ e le rette $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

2 (a) Verificare se le rette r e s sono sghembe.

Sì, le due rette sono sghembe.

Motivazione:

I parametri direttori delle rette r e s sono rispettivamente $(1, 2, -1)$ e $(1, -1, 2)$. Dal momento che essi non sono proporzionali, le due rette non sono parallele.
Per verificare se sono sghembe, cerchiamo i loro eventuali punti di intersezione risolvendo il sistema $\begin{cases} t & = t' \\ 1 + 2t & = -t' \\ 1 - t & = 1 + 2t' \end{cases}$.
Dal momento che il sistema non ha chiaramente soluzioni, le due rette sono sghembe.

2 (b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A e parallelo alle rette r e s.

$\pi : x - y - z - 3 = 0$

Motivazione:

Il piano π deve essere parallelo ai vettori direttori delle due rette e deve passare per A. Una sua equazione cartesiana è quindi data da: $\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$
E quindi $\pi : x - y - z - 3 = 0$.

3 (c) Determinare equazioni parametriche della retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

$$r' : \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} + t \\ y = -\dfrac{7}{3} + 2t \\ z = -\dfrac{7}{3} - t \end{cases}$$

Motivazione:

Dal momento che la retta r è parallela al piano π, la retta r' è parallela alla retta r. Dal momento che la retta r passa per il punto $P := (0, 1, 1)$, la retta r' passa per il punto P' simmetrico del punto P rispetto al piano π.
Per determinare P', consideriamo la retta u passante per P e perpendicolare a π. Si ha ovviamente: $u : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Cerchiamo $H = \pi \cap u$ inserendo le coordinate del punto generico di u nell'equazione di π e determinando t. Otteniamo $t = -\frac{5}{3}$, da cui $H = (\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ e quindi $P' = (\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3})$. La retta r' ha quindi equazioni parametriche $r' : \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} + t \\ y = -\dfrac{7}{3} + 2t \\ z = -\dfrac{7}{3} - t \end{cases}$