COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano date $A \in M(\mathbb{R}, 2, 2)$ e $B \in M(\mathbb{R}, 2, 2)$. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni.

2 (a) *Se B è simile a A allora* $\det B = \det A$.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Se B è simile a A allora esiste $M \in GL(\mathbb{R}, 2)$ tale che $B = M^{-1}AM$. Applicando il teorema di Binet, abbiamo allora $\det B = \det M^{-1} \det A \det M$. Poiché $\det M^{-1} = (\det M)^{-1}$, abbiamo allora $\det B = \det A$.

2 (b) *Se* $\det B = \det A$ *allora B è simile a A.*

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Diamo un controesempio.
Date le matrici $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, si ha $\det B = \det A =$, eppure B non è simile a A poiché B ha come autovalori 2 e $\frac{1}{2}$, mentre A ha come unico autovalore 1.

2. Dati in $\mathbb{R}^5$ i punti $A := (1,2,3,4,5), B := (3,5,7,2,1), C := (4, \frac{13}{2}, 9, 1, -1)$ e $D := (2,3,4,5,6)$, sia r la retta passante A e B.

| 2 | |

(a) Il punto C appartiene alla retta r?

Sì.

Motivazione:

Consideriamo vettori $B - A = (2,3,4,-2,-4)$ e $C - A = (3, \frac{9}{2}, 6, -3, -6)$.
Poiché $C - A = \frac{3}{2}(B - A)$, il punto C appartiene alla retta r.

| 2 | |

(b) Esiste un sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 2 contenente i punti A, B, C e D?
Se non esiste, spiegare perché. Se esiste, determinarne equazioni parametriche.

Sì, esiste. Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 + 3t_1 + t_2 \\ x_3 = 3 + 4t_1 + t_2 \\ x_4 = 4 - 2t_1 + t_2 \\ x_5 = 5 - 4t_1 + t_2 \end{cases}$$

Motivazione:

Abbiamo già visto che il vettore $C - A$ è linearmente dipendente da $B - A$.
Il vettore $D - A = (1,1,1,1,1)$ è chiaramente linearmente indipendente da $B - A$.
Da tutto ciò segue che l'inviluppo affine contenente A, B, C e D ha dimensione 2 ed ha equazione cartesiana

$$A + (B - A)t_1 + (D - A)t_2$$

da cui derivano le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 + 3t_1 + t_2 \\ x_3 = 3 + 4t_1 + t_2 \\ x_4 = 4 - 2t_1 + t_2 \\ x_5 = 5 - 4t_1 + t_2 \end{cases}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$.
Sia E il sottospazio di V avente come base $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
Sia F il sottospazio di V avente come base $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5$.

2	

(a) Determinare una base di $E + F$.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2$

Motivazione:

Sappiamo che il sottospazio $E + F$ è generato dai vettori della base di E e della base di F. Per determinare la dimensione di $E + F$ consideriamo la matrice M avente come colonne le coordinate di questi vettori relative alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$.

Abbiamo $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la quarta colonna è uguale alla differenza tra la seconda e la terza colonna (e quindi $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$). Da ciò segue $\operatorname{rk} M \leq 4$. Inoltre il minore formato dalle prime quattro righe e dalle colonne 1,2,3 e 5 è invertibile. Quindi $\dim(E + F) = \operatorname{rk} M = 4$. Una base di $E + F$ è quindi formata da $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2$.

3	

(b) Determinare una base di $E \cap F$.

$\mathbf{f}_1$

Motivazione:

Applicando la formula di Grassmann otteniamo:
$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 3 + 2 - 4 = 1$.
Per determinare una base di $E \cap F$ è quindi sufficiente determinare un vettore non nullo appartenente a $E \cap F$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{f}_1$, oltre ad appartenere ovviamente a F, appartiene anche a E dal momento che è differenza di due vettori di E. E quindi appartiene a $E \cap F$. Abbiamo quindi determinato una base di $E \cap F$.

2	

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale G di $E+F$ tale che si abbia $E+F = E \oplus G$.

$\mathbf{f}_2$

Dalla formula di Grassmann abbiamo: $\dim(E \oplus G) = \dim E + \dim G$. Dal momento che si deve avere $E + F = E \oplus G)$, abbiamo $\dim G = 1$.
Per determinare una base di G è quindi sufficiente determinare un vettore non nullo di $E+F$ che non appartenga a E.
Per quel che abbiamo visto nella risposta alla domanda (a), possiamo prendere $\mathbf{f}_2$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da: $f((a,b,c)) = (-a+2b, 2a-c, 2b-c)$.

2

(a) Verificare se l'endomorfismo f è un isomorfismo.

L'endomorfismo f è un isomorfismo.

Motivazione:

Consideriamo la matrice A associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Si ha: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Svolgendo i calcoli otteniamo $\det A = 2 \neq 0$ e quindi l'endomorfismo f è un isomorfismo.

NOTA. D'ora in poi indichiamo con A la matrice associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

4

(b) Determinare se, esistono, una matrice $M \in GL(3,\mathbb{R})$ e una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli otteniamo il polinomio caratteristico $\det(A - xI) = (-1-x)(x^2+x-2)$ le cui radici sono $-2, -1, 1$.
Segue che la matrice A, avendo tre autovalori distinti, è diagonalizzabile.
Cerchiamo gli autovettori relativi a -2 risolvendo il sistema $(A+2I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Svolgendo i calcoli otteniamo $a = -2k, b = k, c = -2k$. Ponendo $k = 1$ otteniamo l'autovettore $(-2, 1, -2)$ relativo a -2.
Svolgendo calcoli analoghi, otteniamo l'autovettore $(1,0,2)$ relativo a -1 e l'autovettore $(1,1,1)$ relativo a 1. E quindi le matrici M e D sono:
$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1

(c) Determinare se, esistono, una matrice $N \in O(3)$ e una matrice diagonale D' tali che $D' = N^{-1}AN$.

Matrici N e D' siffatte non esistono.

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica.
Poiché la matrice A non è simmetrica, le matrici N e D' non esistono.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano date le rette $t_1 : x - y + 5 = 0$, $t_2 : x - y - 3 = 0$ e $s : \begin{cases} x = 8 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$.

2	

(a) Determinare un'equazione della circonferenza γ avente il centro sulla retta s e tangente alle rette t_1 e t_2.

$(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 8$

Motivazione:

Il centro C di γ deve essere un punto di s, pertanto sarà del tipo $C := (8 - t, 3 + 2t)$.
Inoltre, poiché la distanza del centro di una circonferenza da una qualsiasi sua tangente è uguale al raggio, deve risultare $\mathrm{d}(C, t_1) = \mathrm{d}(C, t_2)$, cioè
$\frac{|8-t-3-2t+5|}{\sqrt{2}} = \frac{|8-t-3-2t-3|}{\sqrt{2}}$.
Tale condizione è equivalente alle due equazioni $2 - 10 = 0$ e $6t - 12 = 0$. La prima è priva di soluzioni, la seconda dà $t = 2$.
La circonferenza γ ha pertanto centro $C := (6, 7)$ e raggio $r = \mathrm{d}(C, t_1) = 2\sqrt{2}$ e equazione $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 8$, ovvero $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 77 = 0$.

3	

(b) Detti T_1 e T_2 i punti di tangenza di γ con le rette t_1 e t_2, determinare i punti A e B di γ tali che il quadrilatero AT_1BT_2 sia un quadrato.

$A = (4, 5)$ e $B = (8, 9)$

Motivazione:

Osserviamo che, poiché il quadrilatero AT_1BT_2 deve essere un quadrato, la sua diagonale d_1 passante per A e B deve essere perpendicolare all'altra sua diagonale d_2 passante per T_1 e T_2.
D'altronde, essendo le rette t_1 e t_2 parallele, la diagonale d_2 è perpendicolare alle rette t_1 e t_2. E quindi la diagonale d_1 deve essere parallela alle rette t_1 e t_2. Essa passa poi per il centro C della circonferenza. Ha quindi equazione $x - y + 1 = 0$. Pertanto, i punti cercati A e B, essendo intersezione di γ con d_1, sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} (x-6)^2 + (y-7)^2 = 8 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$.
Le soluzioni del sistema sono $A = (4, 5)$ e $B = (8, 9)$.

2	

(c) Determinare il perimetro del quadrato AT_1BT_2.

16

Motivazione:

Ogni lato del quadrato è ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato uguale al raggio di γ e quindi ha lunghezza uguale a $\sqrt{2}(2\sqrt{2}) = 4$.
Il perimetro del quadrato è pertanto uguale a 16.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati, al variare del parametro h, i punti $A := (1, 2, -1), B := (0, 1, 1)$ e $C := (1, 2, h)$.

2

(a) Determinare il valore di h per cui il triangolo ABC è rettangolo in B.

$h = 2$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha parametri direttori $(1, 1, -2)$.
La retta passante per B e C ha parametri direttori $(1, 1, h - 1)$.
Le due rette sono perpendicolari quando si ha $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2(h - 1) = 0$, da cui $h = 2$.
E quindi $C = (1, 2, 2)$.

NOTA: D'ora in poi si consideri il caso in cui il triangolo ABC è rettangolo in B.

3

(b) Determinare la lunghezza dell'altezza del triangolo ABC relativa all'ipotenusa.

$\sqrt{2}$

Motivazione:

L'ipotenusa del triangolo ABC è la retta passante per A e C e quindi ha parametri direttori $(0, 0, 3)$.
Il piano π passante per B e perpendicolare all'ipotenusa ha quindi equazione $z - 1 = 0$.
Sia H il punto di intersezione del piano π con la retta passante per A e C. Si ha $H = (1, 2, 1)$.
La lunghezza dell'altezza cercata è uguale a $\mathrm{d}(B, H) = \sqrt{2}$.

2

(c) Calcolare l'area del triangolo ABC.

$\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Motivazione:

L'area del triangolo ABC è uguale a:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, C)\sqrt{2} = \frac{1}{2} 3\sqrt{2}$$