COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i punti $A := (1,2,3,4)$, $B := (1,3,3,4)$, $C := (1,3,3,5)$, $D := (1,2,3,5)$ e $E := (k,3,3,5)$ con k parametro reale.

2 (a) Determinare tutti i valori di k per i quali i punti A, B , C , D e E sono allineati.

Nessun valore

Motivazione:

I punti A, B , C , D e E sono allineati se e solo se i vettori $B-A$, $C-A$, $D-A$ e $E-A$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1. La matrice avente come colonne le coordinate dei quattro vettori è: $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il suo minore N formato dalla seconda e dalla quarta riga e dalle prime due colonne è invertibile. La matrice M ha quindi rango maggiore o uguale a 2. Pertanto i punti assegnati non sono mai allineati.

2 (b) Determinare tutti i valori di k per i quali i punti A, B, C , D e E sono complanari.

$k = 1$

Motivazione:

I punti A, B , C , D e E sono complanari se e solo se i vettori $B-A$, $C-A$, $D-A$ e $E-A$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 2 e quindi se e solo se la matrice M vista precedentemente ha rango minore o uguale a 2. Consideriamo i minori orlati del minore N visto precedentemente. Se orliamo N con la terza riga otteniamo minori non invertibili perché essi hanno una riga nulla. Orlando N con la prima riga otteniamo i minori $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il primo ha determinante nullo, il secondo ha determinante uguale a $k-1$ e quindi 1 è l'unico valore per cui i punti sono complanari.

2. Sia $f : V \to W$ un omomorfismo da uno spazio vettoriale V avente come base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a uno spazio vettoriale W avente come base $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$.

2	

(a) L'omomorfismo f è suriettivo?

☐ Sì, l'omomorfismo f è sempre suriettivo.
☒ No, l'omomorfismo f non è mai suriettivo.
☐ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo

Motivazione:

Sappiamo che, per ogni omomorfismo $f : V \longrightarrow W$, si ha $\dim f(V) \leq \dim V$ (ricordiamo che ciò deriva dal fatto che le immagini dei vettori di una base di V sono generatori di $f(V)$).
Abbiamo quindi $\dim f(V) \leq \dim V = 2 < 3 = \dim W$.
Segue che $f(V)$ non coincide con W e quindi l'omomorfismo f non è suriettivo.

2	

(b) L'omomorfismo f è iniettivo?

☐ Sì, l'omomorfismo f è sempre iniettivo.
☐ No, l'omomorfismo f non è mai iniettivo.
☒ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo.

Motivazione:

I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo. Per dimostrare ciò diamo un esempio di un omomorfismo non iniettivo e un esempio di un omomorfismo iniettivo.
Sia f l'omomorfismo nullo. Quindi si ha che la dimensione del nucleo è uguale a 2. Sappiamo che un omomorfismo è iniettivo se e solo se la dimensione del nucleo è uguale a 0. Quindi f non è iniettivo.
Consideriamo ora l'omomorfismo f tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Segue che la dimensione dell'immagine è uguale a 2 e quindi la dimensione del nucleo è uguale a 0. Pertanto l'omomorfismo f è iniettivo.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.
Sia V il sottospazio vettoriale di E avente come base $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
Sia W il sottospazio vettoriale di E avente come base $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$

2

(a) Determinare una base di $V + W$.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$

Motivazione:

Consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori delle basi di V e W relativamente alla base assegnata in E:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che si ha $\operatorname{rk} A = 2$. Pertanto $\dim(V + W) = 2$.
Da ciò segue $V + W = V = W$. Quindi come base di $V + W$ possiamo prendere la base assegnata di V.

2

(b) Determinare una base di $V \cap W$.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$

Motivazione:

Abbiamo visto nel punto precedente che $V = W$. Quindi $V \cap W = V$. Quindi come base di $V \cap W$ possiamo prendere la base assegnata di V.

3

(c) Determinare un sottospazio vettoriale F di E tale che $\dim F = 2$ e $\dim(V \cap F) = 1$

F sottospazio vettoriale di base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{e}_1$

Motivazione:

Per far ciò consideriamo il sottospazio F avente come base un vettore di V e un vettore non appartenente a V. Prendiamo, per esempio, i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{e}_1$. Il vettore $\mathbf{e}_1$ è linearmente indipendente dai vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dal momento che la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango uguale a 3.
Segue che $\dim(V + F) = 3$. Applicando allora la formula di Grassmann si ha

$$\dim(V \cap F) = \dim V + \dim F - \dim(V + F) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con k parametro reale, relativamente alla base canonica.

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per i quali il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ appartiene a $f(\mathbb{R}^3)$.

Per qualsiasi valore di k

Motivazione:

Per qualsiasi valore di k la matrice A ha determinante non nullo. Pertanto l'endomorfismo f è suriettivo e quindi il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine.

2	

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ è autovettore di f.

Per nessun valore di k

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si nota che si ha: $f(\mathbf{v}) = (5, 4, 2) \neq x(1, 1, 0)$ per ogni valore di x. Quindi il vettore $\mathbf{v}$ non è mai autovettore di f.

3	

(c) Determinare tutti i valori di k per i quali l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Per $k = 0$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è uguale a $(5 - x)(3 - x)^2$ qualunque sia k. Gli autovalori sono, dunque, 5 con molteplicità algebrica 1 e 3 con molteplicità algebrica 2. Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione degli autospazi.
L'autospazio relativo all'autovalore 5 ha dimensione 1 per ogni valore di k dal momento che la molteplicità algebrica dell'autovalore 5 è uguale a 1.
Si ha poi $\dim E(3) = 3 - \operatorname{rk}(A - 3 \cdot I)$ dove $A - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Abbiamo $\operatorname{rk}(A - 3 \cdot I) = 1$ per $k = 0$ e $\operatorname{rk}(A - 3 \cdot I) = 2$ per $k \neq 0$ e quindi $\dim E(3) = 2$ per $k = 0$ e $\dim E(3) = 1$ per $k \neq 0$.
Pertanto solo per $k = 0$ la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale a 3 e quindi solo per $k = 0$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, consideriamo il punto $A := (3, 4)$ e la retta $r : 3x - y + 1 = 0$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana della retta s simmetrica della retta r relativamente al punto A.

$s : 3x - y - 11 = 0$

Motivazione:

Dati due punti distinti B e C della retta r, la retta s è la retta passante per i punti B' e C' simmetrici rispetto al punto A dei punti B e C rispettivamente. Consideriamo allora il punto $B := (0, 1)$ e il punto $C := (1, 4)$. Il punto B' è quindi il punto tale che il punto A è il punto medio di B e B'. Pertanto le coordinate (x, y) di B' sono tali che $3 = \frac{0+x}{2}$ e $4 = \frac{1+y}{2}$. Segue $B' = (6, 7)$. In modo analogo si trova $C' = (5, 4)$. La retta s passante per B' e C' ha equazione $s : 3x - y - 11 = 0$.

2

(b) Determinare la distanza tra le rette r e s.

$\frac{12}{\sqrt{10}}$

Motivazione:

Osservando le equazioni delle due rette notiamo che le due rette sono parallele. La loro distanza è quindi uguale alla distanza di un qualsiasi punto P' di s dalla retta r. Prendiamo $P' = B'$. Abbiamo

$$\mathrm{d}(B', r) = \frac{|3 \cdot 6 - 7 + 1|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3

(c) Esistono circonferenze che siano tangenti sia alla retta r che alla retta s?
Nel caso in cui esistano, determinare un'equazione di una tale circonferenza. Nel caso in cui non esistano spiegare perché non esistono.

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{18}{5}$

Motivazione:

Il centro di una tale circonferenza dovrà essere un punto equidistante dalle due rette. Esistono infiniti punti di questo tipo. Uno di essi è il punto A.
Infatti si ha: $\mathrm{d}(A, r) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 + 1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$ e $\mathrm{d}(A, s) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 - 11|}{\sqrt{1+9}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$.
Il raggio della circonferenza di centro A tangente alle due rette è pertanto uguale a $\frac{6}{\sqrt{10}}$.
La circonferenza ha quindi equazione:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{18}{5}.$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesino, consideriamo il piano $\pi : x+y+3z-8=0$ e il punto $A := (3,2,1)$ appartente ad esso.

2	

(a) Verificare se la retta r passante per A e per il punto $B = (6,2,0)$ interseca o è contenuta nel piano π.

La retta r è contenuta nel piano π.

Motivazione:

Inserendo le coordinate del punto B nell'equazione del piano π otteniamo $6+2+3\cdot 0-8=0$. Quindi il punto B appartiene al piano π. Pertanto la retta r, poiché passa per due punti distinti di π, è contenuta in π.

3	

(b) Determinare la retta s passante per il punto A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

$$\begin{cases} x+y+3z-8=0 \\ -3x+z+8=0 \end{cases}$$

Motivazione:

Consideriamo il piano α passante per A e perpendicolare alla retta r.
Per determinarne una sua equazione consideriamo i parametri direttori della retta r. Essi sono dati dalle differenze delle coordinate dei punti A e B: $(3-6, 2-2, 1-0) = (-3, 0, 1)$.
Pertanto il piano α ha equazione $-3(x-3)+(z-1)=0$, cioè $-3x+z+8=0$.
La retta s intersezione del piano π e del piano α passa per il punto A (poiché entrambi i piani passano per A) ed è contenuta ovviamente in π. Inoltre la retta r, essendo perpendicolare al piano α, è perpendicolare ad ogni retta del piano α passante per il punto $A = r \cap \alpha$ e quindi in particolare le rette r e s sono perpendicolari.
La retta s è quindi la retta cercata.

2	

(c) Calcolare la distanza del punto B dalla retta s determinata nel punto precedente.

$\mathrm{d}(B,s) = \sqrt{10}$

Motivazione:

Per determinare la distanza possiamo considerare la retta r' passante per B incidente e perpendicolare alla retta s, determinare $H = r' \cap s$ e calcolare la distanza tra B e H.
Ma, per costruzione, $r' = r$ e quindi $H = A$.
Abbiamo allora $\mathrm{d}(B,s) = \mathrm{d}(B,A) = \sqrt{(6-3)^2+(2-2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{10}$.