COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 := (1,2), \mathbf{v}_2 := (1,1), \mathbf{v}_3 := (3,5)$.
Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{w}_1 := (1,2,1), \mathbf{w}_2 := (2,4,k), \mathbf{w}_3 := (4,8,h)$, dove h e k sono numeri reali.

2 (a) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste un omomorfismo iniettivo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$.

$k \neq 2$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{v}_1 := (1,2), \mathbf{v}_2 := (1,1)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^2$. Quindi, assegnati comunque i vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, esiste ed è unico un omomorfismo f verificante le condizioni $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Affinché questo omomorfismo sia iniettivo è necessario e sufficiente che $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ siano linearmente indipendenti e quindi $k \neq 2$.

2 (b) Posto $k = 5$, determinare tutti i valori h per i quali esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$.

$h = 7$

Motivazione:

Da (a) segue che esiste uno e un solo omomorfismo f tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Abbiamo $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e quindi si deve avere $\mathbf{w}_3 = f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (4,8,7)$. Quindi $h = 7$.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (1, 2, 3, 4), B := (1, 1, 1, 1)$ e $C := (0, 1, 2, 3)$.

2	

(a) Esiste un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$, tale che $\dim V = 2$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne una base. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Il sottospazio V esiste. Una sua base è data da A e B.

Motivazione:

Lo spazio vettoriale V cercato è generato da A, B e C. Si ha $C = A - B$ e quindi C è linearmente dipendente da A e B.
D'altronde i vettori A e B sono chiaramente linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

2	

(b) Esiste una retta di $\mathbb{R}^4$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne le equazioni parametriche. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Una tale retta non esiste.

Motivazione:

La matrice M avente come colonne $B - A$ e $C - A$ è $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Il minore di M formato dalle prime due righe è invertibile. Quindi $\operatorname{rk} M = 2$. L'inviluppo affine contenente i punti A, B e C ha quindi dimensione uguale a 2. Non è quindi una retta.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 = 0\}$$

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ avente come base $\mathbf{w}_1 := (1, 1, 4, 0), \mathbf{w}_2 := (4, 5, 3, 4)$.

2 (a) Determinare una base di V.

$\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 4)$

Motivazione:

Per determinare un vettore di V poniamo $x_1 = x_2 = 0$. La seconda equazione è quindi verificata. Dalla prima equazione otteniamo $-x_3 - x_4 = 0$. Poniamo $x_3 = 1$ e quindi dalla prima equazione otteniamo $x_4 = -1$. Abbiamo così ottenuto il vettore $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, -1)$ appartenente a V.
Per determinare un secondo vettore di V poniamo $x_1 = x_2 = 1$. La seconda equazione è quindi verificata. Dalla prima equazione otteniamo $4 - x_3 - x_4 = 0$. Poniamo $x_3 = 0$ e quindi dalla prima equazione otteniamo $x_4 = 4$. Abbiamo così ottenuto il vettore $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 4)$ appartenente a V.
I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono chiaramente linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

3 (b) Determinare una base di $V \cap W$.

$\mathbf{w}_1$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{w}_1$ verifica le condizioni del sottospazio V e quindi $\dim V \cap W \geq 1$. D'altronde il vettore $\mathbf{w}_2$ non verifica le condizioni del sottospazio V e quindi $V \neq W$. Abbiamo pertanto $\dim V \cap W = 1$. Una sua base è quindi data dal vettore $\mathbf{w}_1$.

2 (c) Determinare una base per un sottospazio U supplementare di W in $\mathbb{R}^4$.

$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0)$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0)$ formano una base di un supplementare U di W dal momento che i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ formano una base di $\mathbb{R}^4$. Infatti la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avente come colonne le coordinate dei quattro vettori relative alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ha determinante diverso da 0.

4. Al variare del numero reale k, sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

2 (a) Determinare, al variare di k, una base dell'immagine di f.

$\mathbf{v_1} = (1, 1, 0), \mathbf{v_2} = (k, 0, 2)$, per ogni valore di k.

Motivazione:

Dal momento che le prime due colonne di A sono uguali, $\operatorname{rk} A < 3$. Inoltre il minore formato dalla seconda e dalla terza riga e dalla seconda e dalla terza colonna è invertibile per ogni valore di k. Quindi $\operatorname{rk} A = 2$ per ogni k. I vettori $(1, 1, 0)$ e $(k, 0, 2)$, corrispondenti alle ultime due colonne di A, formano quindi una base per l'immagine di f.

3 (b) Determinare tutti i valori di k per i quali esistono una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$. Per ognuno di tali valori di k, determinare le matrici D e M.

$k = 0$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A ha come radici $x = 0$, con molteplicità 1, e $x = 2$, con molteplicità 2. Quindi $\dim E(0) = 1$ per ogni valore di k. Una base di $E(0)$ è data dal vettore $(1, -1, 0)$ dal momento che le prime due colonne di A sono uguali.
Si ha poi $\dim E(2) = 3 - \operatorname{rk}(A - 2I)$. La matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 1 per $k = 0$ (la seconda colonna è l'opposto della prima) e rango uguale a 2 per $k \neq 0$ (le ultime due colonne sono linearmente indipendenti). E quindi $\dim E(2) = 2$ se e solo se $k = 0$.
Se $k = 0$, una base di $E(2)$ è data da $(1, 1, 0)$ (dal momento che la seconda colonna di $A - 2I$ è l'opposto della prima) e da $(0, 0, 1)$ (dal momento che la terza colonna di $A - 2I$ è nulla). Quindi le matrici D e M esistono se e solo se $k = 0$. Per $k = 0$ abbiamo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 (c) Scelto uno dei valori di k ottenuti in (b), determinare, se esiste, una matrice ortogonale N tale che $D = N^{-1}AN$, dove D è la matrice ottenuta in (b).

$k = 0$, $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Poniamo $k = 0$. In questo caso la matrice A è simmetrica e quindi una matrice N esiste. Per determinarne una sostituiamo in ogni autospazio la base con una base ortonormale. Poiché in entrambi gli spazi le basi da noi scelte sono già ortogonali, dobbiamo solamente dividere ogni vettore per la sua norma.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1,2)$ e $B := (4,6)$.

3 (a) Determinare i punti C e C' tali che i triangoli ABC e ABC' siano rettangoli in A e abbiano area uguale a 25.

$C = (9,-4)$ e $C' = (-7,8)$

Motivazione:

I punti C e C' devono appartenere alla retta r passante per A e perpendicolare alla retta s passante per A e B. Poiché la retta s ha parametri direttori $(4-1, 6-2) = (3,4)$, la retta r ha parametri direttori $(4,-3)$ e quindi ha equazioni parametriche $r : \begin{cases} x &= 1+4t \\ y &= 2-3t \end{cases}$.
L'area del triangolo ABC è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A,B)\cdot\mathrm{d}(C,A)$. Poiché $\mathrm{d}(A,B) = 5$, si deve avere $\mathrm{d}(C,A) = 10$. Analogamente si deve avere $\mathrm{d}(C'A) = 10$. Cerchiamo quindi i punti di r aventi distanza da A uguale a 10. Si ha $\sqrt{(1+4t-1)^2+(2-3t-2)^2} = \sqrt{(16+9)t^2} = 10$. E quindi $t = \pm 2$. Segue $C = (9,-4)$ e $C' = (-7,8)$.

2 (b) Determinare le circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ circoscritte rispettivamente ai triangoli ABC e ABC'.

$\mathcal{S} : (x-\frac{13}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4}$

$\mathcal{S}' : (x+\frac{3}{2})^2 + (y-7)^2 = \frac{125}{4}$

Motivazione:

Nella circonferenza $\mathcal{S}$ circoscritta al triangolo ABC l'angolo alla circonferenza di vertice A è retto e quindi insiste sul diametro BC della circonferenza. Segue che il centro della circonferenza $\mathcal{S}$ è il punto medio M dei punti B e C. Quindi $M = (\frac{4+9}{2}, \frac{6-4}{2}) = (\frac{13}{2}, 1)$. Il raggio della circonferenza $\mathcal{S}$ è uguale a $\mathrm{d}(M,A) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.
Analogamente il centro M' della circonferenza $\mathcal{S}'$ è il punto medio dei punti B e C'. Quindi $M' = (\frac{4-7}{2}, \frac{6+8}{2}) = (-\frac{3}{2}, 7)$. Il raggio della circonferenza $\mathcal{S}'$ è uguale a $\mathrm{d}(M'A) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

2 (c) Determinare equazioni parametriche dell'asse del segmento avente come estremi i centri delle circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

$r : \begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 2+4t \end{cases}$.

Motivazione:

Le due circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ si intersecano nei punti A e B. E quindi l'asse del segmento avente come estremi i loro centri è dato dalla retta s passante per A e B. Quest'ultima ha equazione $\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 2+4t \end{cases}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2, 1)$ e $B := (3, 1, 1)$ e sia r' la retta passante per i punti $C := (-1, 4, 2)$ e $D := (2, 4, 1)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per $P_0 := (-2, -2, 0)$ e parallelo alle rette r e r'.

$\pi : x + 2y + 3z + 6 = 0$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(3 - 1, 1 - 2, 1 - 1) = (2, -1, 0)$.
La retta r' ha parametri direttori $(2 + 1, 4 - 4, 1 - 2) = (3, 0, -1)$. Il piano π ha quindi equazione: $\begin{vmatrix} x+2 & y+2 & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Da cui $\pi : x + 2y + 3z + 6 = 0$.

2

(b) Determinare la sfera $\mathcal{S}$ di centro A e tangente al piano π.

$\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 14$

Motivazione:

La sfera $\mathcal{S}$ ha raggio uguale a $\mathrm{d}(A, \pi) = \frac{|1+4+3+6|}{\sqrt{1+4+9}} = \sqrt{14}$.
E quindi $\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 14$.

3

(c) Determinare il punto T di tangenza della sfera $\mathcal{S}$ con il piano π.

$T = (0, 0, -2)$

Motivazione:

Il punto di tangenza T è dato dall'intersezione di π con la retta s passante per A e perpendicolare a π. Abbiamo: $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Determiniamo il valore di t per il quale il punto generico di s appartiene a π:
$1 + t + 4 + 4t + 3 + 9t + 6 = 0$. Da cui $14t + 14 = 0$, $t = -1$. E quindi $T = (0, 0, -2)$.

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 := (2,1), \mathbf{v}_2 := (1,1), \mathbf{v}_3 := (7,4)$.
Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{w}_1 := (1,2,1), \mathbf{w}_2 := (2,4,k), \mathbf{w}_3 := (5,10,h)$, dove h e k sono numeri reali.

2 | (a) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste un omomorfismo iniettivo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$.

$k \neq 2$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{v}_1 := (2,1), \mathbf{v}_2 := (1,1)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^2$. Quindi, assegnati comunque i vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, esiste ed è unico un omomorfismo f verificante le condizioni $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Affinché questo omomorfismo sia iniettivo è necessario e sufficiente che $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ siano linearmente indipendenti e quindi $k \neq 2$.

2 | (b) Posto $k = 6$, determinare tutti i valori h per i quali esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$.

$h = 9$

Motivazione:

Da (a) segue che esiste uno e un solo omomorfismo f tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Abbiamo $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e quindi si deve avere $\mathbf{w}_3 = f(\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (5,10,9)$. Quindi $h = 9$.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (4, 2, 3, 1), B := (1, 1, 1, 1)$ e $C := (3, 1, 2, 0)$.

2	

(a) Esiste un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$, tale che $\dim V = 2$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne una base. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Il sottospazio V esiste. Una sua base è data da A e B.

Motivazione:

Lo spazio vettoriale V cercato è generato da A, B e C. Si ha $C = A - B$ e quindi C è linearmente dipendente da A e B.
D'altronde i vettori A e B sono chiaramente linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

2	

(b) Esiste una retta di $\mathbb{R}^4$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne le equazioni parametriche. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Una tale retta non esiste.

Motivazione:

La matrice M avente come colonne $B - A$ e $C - A$ è $M = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il minore di M formato dalle prime due righe è invertibile. Quindi $\operatorname{rk} M = 2$. L'inviluppo affine contenente i punti A, B e C ha quindi dimensione uguale a 2. Non è quindi una retta.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 = 0\}$$

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ avente come base $\mathbf{w}_1 := (1, 1, 6, 0), \mathbf{w}_2 := (4, 5, 3, 4)$.

| 2 | |

(a) Determinare una base di V.

$\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 6)$

Motivazione:

Per determinare un vettore di V poniamo $x_1 = x_2 = 0$. La seconda equazione è quindi verificata. Dalla prima equazione otteniamo $-x_3 - x_4 = 0$. Poniamo $x_3 = 1$ e quindi dalla prima equazione otteniamo $x_4 = -1$. Abbiamo così ottenuto il vettore $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, -1)$ appartenente a V.
Per determinare un secondo vettore di V poniamo $x_1 = x_2 = 1$. La seconda equazione è quindi verificata. Dalla prima equazione otteniamo $6 - x_3 - x_4 = 0$. Poniamo $x_3 = 0$ e quindi dalla prima equazione otteniamo $x_4 = 6$. Abbiamo così ottenuto il vettore $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 6)$ appartenente a V.
I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono chiaramente linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

| 3 | |

(b) Determinare una base di $V \cap W$.

$\mathbf{w}_1$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{w}_1$ verifica le condizioni del sottospazio V e quindi $\dim V \cap W \geq 1$. D'altronde il vettore $\mathbf{w}_2$ non verifica le condizioni del sottospazio V e quindi $V \neq W$. Abbiamo pertanto $\dim V \cap W = 1$. Una sua base è quindi data dal vettore $\mathbf{w}_1$.

| 2 | |

(c) Determinare una base per un sottospazio U supplementare di W in $\mathbb{R}^4$.

$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0)$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0)$ formano una base di un supplementare U di W dal momento che i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ formano una base di $\mathbb{R}^4$. Infatti la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avente come colonne le coordinate dei quattro vettori relative alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ha determinante diverso da 0.

4. Al variare del numero reale k, sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

2	

(a) Determinare, al variare di k, una base dell'immagine di f.

$\mathbf{v_1} = (2, 2, 0), \mathbf{v_2} = (k, 0, 4)$, per ogni valore di k.

Motivazione:

Dal momento che le prime due colonne di A sono uguali, $\operatorname{rk} A < 3$. Inoltre il minore formato dalla seconda e dalla terza riga e dalla seconda e dalla terza colonna è invertibile per ogni valore di k. Quindi $\operatorname{rk} A = 2$ per ogni k. I vettori $(2, 2, 0)$ e $(k, 0, 4)$, corrispondenti alle ultime due colonne di A, formano quindi una base per l'immagine di f.

3	

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali esistono una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$. Per ognuno di tali valori di k, determinare le matrici D e M.

$k = 0$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A ha come radici $x = 0$, con molteplicità 1, e $x = 4$, con molteplicità 2. Quindi $\dim E(0) = 1$ per ogni valore di k. Una base di $E(0)$ è data dal vettore $(1, -1, 0)$ dal momento che le prime due colonne di A sono uguali.
Si ha poi $\dim E(4) = 3 - \operatorname{rk}(A - 4I)$. La matrice $A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & k \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 1 per $k = 0$ (la seconda colonna è l'opposto della prima) e rango uguale a 2 per $k \neq 0$ (le ultime due colonne sono linearmente indipendenti). E quindi $\dim E(4) = 2$ se e solo se $k = 0$.
Se $k = 0$, una base di $E(4)$ è data da $(1, 1, 0)$ (dal momento che la seconda colonna di $A - 4I$ è l'opposto della prima) e da $(0, 0, 1)$ (dal momento che la terza colonna di $A - 4I$ è nulla). Quindi le matrici D e M esistono se e solo se $k = 0$. Per $k = 0$ abbiamo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2	

(c) Scelto uno dei valori di k ottenuti in (b), determinare, se esiste, una matrice ortogonale N tale che $D = N^{-1}AN$, dove D è la matrice ottenuta in (b).

$k = 0$, $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Poniamo $k = 0$. In questo caso la matrice A è simmetrica e quindi una matrice N esiste. Per determinarne una sostituiamo in ogni autospazio la base con una base ortonormale. Poiché in entrambi gli spazi le basi da noi scelte sono già ortogonali, dobbiamo solamente dividere ogni vettore per la sua norma.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (2, 1)$ e $B := (6, 4)$.

3	

(a) Determinare i punti C e C' tali che i triangoli ABC e ABC' siano rettangoli in A e abbiano area uguale a 25.

$C = (-4, 9)$ e $C' = (8, -7)$

Motivazione:

I punti C e C' devono appartenere alla retta r passante per A e perpendicolare alla retta s passante per A e B. Poiché la retta s ha parametri direttori $(6-2, 4-1) = (4, 3)$, la retta r ha parametri direttori $(-3, 4)$ e quindi ha equazioni parametriche $r : \begin{cases} x &= 2-3t \\ y &= 1+4t \end{cases}$.
L'area del triangolo ABC è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, B) \cdot \mathrm{d}(C, A)$. Poiché $\mathrm{d}(A, B) = 5$, si deve avere $\mathrm{d}(C, A) = 10$. Analogamente si deve avere $\mathrm{d}(C'A) = 10$. Cerchiamo quindi i punti di r aventi distanza da A uguale a 10. Si ha $\sqrt{(2-3t-2)^2 + (1+4t-1)^2} = \sqrt{(9+16)t^2} = 10$. E quindi $t = \pm 2$. Segue $C = (-4, 9)$ e $C' = (8, -7)$.

2	

(b) Determinare le circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ circoscritte rispettivamente ai triangoli ABC e ABC'.

$\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{125}{4}$

$\mathcal{S}' : (x-7)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{125}{4}$

Motivazione:

Nella circonferenza $\mathcal{S}$ circoscritta al triangolo ABC l'angolo alla circonferenza di vertice A è retto e quindi insiste sul diametro BC della circonferenza. Segue che il centro della circonferenza $\mathcal{S}$ è il punto medio M dei punti B e C. Quindi $M = (\frac{6-4}{2}, \frac{4+9}{2}) = (1, \frac{13}{2})$. Il raggio della circonferenza $\mathcal{S}$ è uguale a $\mathrm{d}(M, A) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.
Analogamente il centro M' della circonferenza $\mathcal{S}'$ è il punto medio dei punti B e C'. Quindi $M' = (\frac{6+8}{2}, \frac{4-7}{2}) = (7, -\frac{3}{2})$. Il raggio della circonferenza $\mathcal{S}'$ è uguale a $\mathrm{d}(M'A) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

2	

(c) Determinare equazioni parametriche dell'asse del segmento avente come estremi i centri delle circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

$r : \begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= 1+3t \end{cases}$.

Motivazione:

Le due circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ si intersecano nei punti A e B. E quindi l'asse del segmento avente come estremi i loro centri è dato dalla retta s passante per A e B. Quest'ultima ha equazione $\begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= 1+3t \end{cases}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2, 1)$ e $B := (1, 1, 3)$ e sia r' la retta passante per i punti $C := (2, 4, -1)$ e $D := (1, 4, 2)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per $P_0 := (0, -2, -2)$ e parallelo alle rette r e r'.

$\pi : 3x + 2y + z + 6 = 0$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(1 - 1, 1 - 2, 3 - 1) = (0, -1, 2)$.
La retta r' ha parametri direttori $(1 - 2, 4 - 4, 2 + 1) = (-1, 0, 3)$. Il piano π ha quindi equazione: $\begin{vmatrix} x & y+2 & z+2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Da cui $\pi : 3x + 2y + z + 6 = 0$.

2

(b) Determinare la sfera $\mathcal{S}$ di centro A e tangente al piano π.

$\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 14$

Motivazione:

La sfera $\mathcal{S}$ ha raggio uguale a $\mathrm{d}(A, \pi) = \frac{|3+4+1+6|}{\sqrt{9+4+1}} = \sqrt{14}$.
E quindi $\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 14$.

3

(c) Determinare il punto T di tangenza della sfera $\mathcal{S}$ con il piano π.

$T = (-2, 0, 0)$

Motivazione:

Il punto di tangenza T è dato dall'intersezione di π con la retta s passante per A e perpendicolare a π. Abbiamo: $s : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Determiniamo il valore di t per il quale il punto generico di s appartiene a π:
$3 + 9t + 4 + 4t + 1 + t + 6 = 0$. Da cui $14t + 14 = 0$, $t = -1$. E quindi $T = (-2, 0, 0)$.