COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati in $\mathbb{R}^6$ i punti $P_1 := (1,0,1,1,0,-2), P_2 := (-1,2,1,-9,0,2)$, e l'iperpiano di equazione cartesiana $\pi : x_1 - x_2 + 5x_4 - 2x_6 = 1$.

2 (a) Determinare se il segmento P_1P_2 interseca o meno l'iperpiano π.

Sì, lo interseca.

Motivazione:

Sostituendo le coordinate di P_1 nell'equazione di π si ottiene $1+5+4-1 = 9 > 0$. Sostituendo le coordinate di P_2 nell'equazione di π si ottiene $-1-2-45-4-1 = -53 < 0$. Quindi i due punti appartengono a semispazi opposti rispetto a π e quindi il segmento P_1P_2 interseca l'iperpiano.

2 (b) La retta passante per P_1 e P_2 è ortogonale a π?

Sì, lo è.

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(-1-1, 2-0, 1-1, -9-1, 0-0, 2-(-2))$ che sono proporzionali ai coefficienti $(1,-1,0,5,0,-2)$ di π che determinano un vettore ortogonale a π, allora la retta r è ortogonale a π.

2. Verificare se ognuna delle seguenti affermazioni è vera. Se è vera darne una dimostrazione altrimenti fornire un controesempio.

2	

(a) Se A, B, M sono matrici quadrate di ordine n con elementi reali tali che M è invertibile e $B = M^{-1}AM$, allora $\det(B) = \det(A)$.

Vera.

Motivazione:

$\det(B) = \det(M^{-1}AM) = \det(M^{-1})\det(A)\det(M) = \frac{1}{\det(M)}\det(A)\det(M) = \det(A)$.

2	

(b) Se A, B sono matrici quadrate di ordine $n > 1$ a elementi reali tali che $\det(A) = \det(B)$, allora esiste una matrice invertibile M di ordine n a elementi reali tale che $B = M^{-1}AM$.

Falsa.

Motivazione:

Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si ha $\det(A) = \det(B) = 1$. Ma la matrice A non è diagonalizzabile perché ha come unico autovalore 1 e l'autospazio relativo all'autovalore 1 di dimensione uguale a $2 - \text{rk}(A - I) = 1$. La matrice B non è quindi simile alla matrice diagonale A.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f la funzione dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ dei polinomi di grado minore di 3 a coefficienti reali allo spazio delle matrici $M(2, 2, \mathbb{R})$ definito nel seguente modo: dato $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$, allora $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}$, dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

2 (a) Dimostrare che f è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Motivazione:

Si ha $f(p(x)) = \begin{pmatrix} c & a+b+c \\ b & 2a+b \end{pmatrix}$. Poiché gli elementi della matrice $f(p(x))$ sono polinomi omogenei di primo grado rispetto ai coefficienti a, b, c di $p(x)$, la funzione è un omomorfismo.

2 (b) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di f.

$\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Motivazione:

Data la base canonica $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$. Si ha $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice avente come colonne le coordinate di questi tre vettori relativamente alla base canonica di $M(2, 2, \mathbb{R})$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Essa ha rango uguale a 3 perché il determinante del minore formato dalle prime tre righe è non nullo. Quindi questi tre vettori sono linearmente indipendenti e allora formano una base di $\operatorname{Im}(f)$.

3 (c) Determinare la dimensione del sottospazio $\operatorname{Im}(f) \cap S_2(\mathbb{R})$, dove $S_2(\mathbb{R})$ è il sottospazio delle matrici simmetriche una cui base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim(\operatorname{Im}(f) \cap S_2(\mathbb{R})) = 2$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann segue:
$\dim(\operatorname{Im}(f) \cap S_2(\mathbb{R})) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(S_2(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Im}(f) + S_2(\mathbb{R}))$.
Inoltre da $S_2(\mathbb{R}) \subseteq \operatorname{Im}(f)) + S_2(\mathbb{R}) \subseteq M(2, 2, \mathbb{R})$ segue $3 \leq \dim(\operatorname{Im}(f)) + S_2(\mathbb{R})) \leq 4$. D'altronde non si può avere $\dim(\operatorname{Im}(f)) + S_2(\mathbb{R})) = 3$ perché, se così fosse, si dovrebbe avere $S_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Im}(f)$. Ma ciò non è possibile perché abbiamo visto nella risposta precedente che in $\operatorname{Im}(f)$ vi sono matrici che non sono simmetriche.
Da tutto ciò segue $\dim(\operatorname{Im}(f)) + S_2(\mathbb{R})) = 4$ e quindi $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap S_2(\mathbb{R})) = 2$.

4. Al variare dei parametri reali a e b, sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare, al variare di a e b, il rango della matrice A.

Se $b \neq 0, \forall a, \operatorname{rk} A = 3$
Se $b = 0, \forall a, \operatorname{rk} A = 1$.

Motivazione:

Si ha $\det(A) = b^2$ e quindi se $b \neq 0$ si ha $\operatorname{rk}(A) = 3$.
Se $b = 0$ si vede immediatamente che si ha $\operatorname{rk}(A) = 1 \forall a$.

4	

(b) Determinare tutti i valori di a e b per i quali la matrice A è simile ad una matrice diagonale.

Se $b \neq 1, \forall a$ e se $b = 1, a = 0$.

Motivazione:

La matrice A è triangolare si ha che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = b$.
Consideriamo prima il caso $b \neq 1$. Abbiamo $\dim E(1) = 1$ e $\dim E(b) = 3 - \operatorname{rk}(A - bI)$.
Ma $A - bI = \begin{pmatrix} 1-b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi, poiché $b - 1 \neq 0$, si ha $\operatorname{rk}(A - bI) = 1 \forall a$ e quindi $\dim E(b) = 3 - 1 = 2$. Da ciò segue che la matrice A è diagonalizzabile per $b \neq 1, \forall a$.
Consideriamo ora il caso $b = 1$. Abbiamo un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 3. Abbiamo poi: $\dim E(1) = 3 - \operatorname{rk}(A - I)$.
Ma $A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. E quindi, se $a = 0$, si ha $\operatorname{rk}(A - I) = 0$ e quindi $\dim E(1) = 3$.
Segue che A è diagonalizzabile. Ciò è d'altronde ovvio perché con queste ipotesi si ha $A = I$.
Nel caso in cui $a \neq 0$ si ha $\operatorname{rk}(A - I) = 1$ e quindi $\dim E(1) = 3 - 1 = 2$. Segue che A non è diagonalizzabile. Da ciò tutto segue che, se $b = 1$ la matrice A è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$.

1	

(c) Determinare tutti i valori di a e b per i quali esiste una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

$a = 0, \forall b$.

Motivazione:

La matrice è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se A è simmetrica, cioè se e solo se $a = 0, \forall b$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (3, 6)$.

| 2 | |

(a) Determinare le coordinate di tutti i punti C tali che i triangoli di vertici A, B e C siano isosceli con base AB.

$C = (2 + 2t, 4 - t)$ con $t \in \mathbb{R}$

Motivazione:

In un triangolo isoscele ABC di base AB il punto C, per definizione di triangolo isoscele, è equidistante da A e B e quindi appartiene all'asse r del segmento AB. Viceversa, ogni punto C dell'asse r di AB è equidistante da A e B. I punti C cercati sono quindi tutti e soli i punti dell'asse di AB.
Il punto medio di AB è $M := (2, 4)$. La retta passante per A e B ha parametri direttori $(3-1, 6-2) = (2, 4)$. Le rette ad essa perpendicolari hanno parametri direttori proporzionali a $(2, -1)$. L'asse di AB ha equazioni $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$. Pertanto $C = (2+2t, 4-t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

| 2 | |

(b) Determinare le coordinate di tutti i punti D tali che i triangoli di vertici A, B e D siano equilateri.

$D = (2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3})$, $D' = (2 - 2\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3})$

Motivazione:

I punti D cercati devono appartenere all'asse di AB e devono essere tali che $\mathrm{d}(D, A) = \mathrm{d}(A, B)$. Abbiamo $\mathrm{d}(A, B)^2 = 20$. Preso quindi il punto C generico dell'asse del segmento AB, che abbiamo determinato nella risposta precedente, abbiamo: $\mathrm{d}(C, A)^2 = (1 + 2t)^2 + (2 - t)^2 = 5t^2 + 5$. Imponendo $5t^2 + 5 = 20$ otteniamo $t = \pm\sqrt{3}$. I punti cercati sono quindi due: $D = (2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3})$, $D' = (2 - 2\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3})$.

| 3 | |

(c) Determinare i punti E e F tali che il quadrilatero $AEBF$ sia un quadrato avente come diagonale AB.

$E = (4, 3), F = (0, 5)$

Motivazione:

I punti E e F appartengono alla diagonale di $AEBF$. Le diagonali di un quadrato hanno la stessa lunghezza, sono perpendicolari tra loro e si intersecano nel loro punto medio. E quindi la diagonale EF è l'asse del segmento AB, di cui abbiamo già trovato le equazioni parametriche. Inoltre i punti E e F devono avere distanza dal punto M, punto medio della diagonale AB, uguale a $\frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$.
Cerchiamo allora i punti C dell'asse di AB aventi distanza da M uguale a $\sqrt{5}$. Dato un generico punto C dell'asse del segmento AB abbiamo $\mathrm{d}(C, M)^2 = 4t^2 + t^2 = 5t^2$. E quindi $5t^2 = 5$. Da cui $t = \pm 1$.
Segue $E = (4, 3), F = (0, 5)$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, sia r la retta passante per i punti $A := (1,2,3)$ e $B := (3,3,6)$.

2	

(a) Determinare la retta r sia in equazioni parametriche sia in equazioni cartesiane.

$$r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3+3t \end{cases} \quad r : \begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y-z-3=0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r ha come parametri direttori $(3-1, 3-2, 6-3) = (2,1,3)$ e equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3+3t \end{cases}$.
Per esprimere la retta r in equazioni cartesiane a partire dalle equazioni parametriche, dalla seconda equazione ricaviamo $t = y-2$ e sostituendo il parametro t nella prima e nella terza equazione otteniamo $r : \begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y-z-3=0 \end{cases}$. Abbiamo così espresso la retta r in equazioni cartesiane.

2	

(b) Quanti sono i piani contenenti la retta r e perpendicolari al piano $\alpha := x+y-z+3=0$. Per ognuno di essi determinare un'equazione cartesiana.

Vi è un solo piano. Esso ha equazione $\alpha' : 4x-5y-z+9=0$.

Motivazione:

Consideriamo il fascio dei piani passanti per la retta r. Esso è $a(x-2y+3)+b(3y-z-3)=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$. Cioè $ax+(-2a+3b)y+(-bz)+3a-3b=0$. Imponendo la condizione di perpendicolarità con il piano α otteniamo $a-2a+3b+b=0$. Questa equazione è verificata dalle coppie $(a=4t, b=t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Ponendo $t=1$ abbiamo $(a=4, b=1)$. E quindi otteniamo il piano $\alpha' : 4x-5y-z+9=0$.

3	

(c) Quanti sono i piani contenenti la retta r e perpendicolari al piano $\beta := -2x-y-3z-7=0$. Per ognuno di essi determinare un'equazione cartesiana.

Vi sono infiniti piani: tutti quelli appartenenti al fascio dei piani contenenti la retta r. Essi hanno equazione cartesiana $a(x-2y+3)+b(3y-z+3)=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$.

Motivazione:

Come nella risposta alla domanda precedente, consideriamo il fascio di piani contenenti la retta r e imponiamo la perpendicolarità con il piano β. Otteniamo: $-2a+2a-3b+3b=0$. Che è un'identità. Ciò significa che ogni piano contenente la retta r è perpendicolare al piano β.
Ciò non ci stupisce perché i parametri direttori della retta r sono proporzionali ai coefficienti delle variabili dell'equazione cartesiana del piano β e quindi la retta r è perpendicolare al piano β. D'altronde c'è un teorema che dice che, se un piano γ contiene una retta perpendicolare ad un piano β, allora il piano γ è perpendicolare al piano β.