26 luglio 2017 - Soluzione esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria gestionale - a.a. 2016-2017

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n con elementi reali, con n intero positivo maggiore di 1. Per ognuna delle seguenti affermazioni dimostrarne la verità oppure trovarne un controesempio.

2 (a) Se $A^2 = 0_n$, allora $A = 0_n$ (dove 0_n indica la matrice quadrata di ordine n con elementi tutti uguali a zero).

Falso.

Motivazione:

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Svolgendo i calcoli si vede immediatamente che si ha $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.
Poiché ovviamente si ha $A \neq 0_2$, abbiamo fornito un controesempio.

2 (b) Se $A^2 = I_n$, allora $A = I_n$ (dove I_n indica la matrice identità di ordine n).

Falso.

Motivazione:

Sia $A = -I_2$, cioè $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Svolgendo i calcoli si vede immediatamente che si ha $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
Poiché ovviamente si ha $A \neq I_2$, abbiamo fornito un controesempio.

2. Si considerino i seguenti elementi di $\mathbb{R}^4$: $A := (1,2,3,4), B := (5,6,7,8), C := (9,10,11,12)$.

| 2 | |

(a) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da A, B e C. Determinare la dimensione di V e una base di V.

$\dim V = 2$. Una base di V è formata dai vettori A e B.

Motivazione:

La dimensione di V è uguale al rango della matrice M avente come colonne le coordinate di A, B, C relative alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si ha $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Per calcolare il rango della matrice M, calcoliamo il rango della matrice N, ottenuta sottraendo alla seconda e alla terza colonna la prima colonna. Abbiamo: $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} N = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. La matrice N ha le prime due colonne linearmente indipendenti (infatti il minore formato dalle prime due righe e colonne è invertibile) e la terza colonna chiaramente linearmente dipendente dalla seconda colonna.

Pertanto $\dim V = \operatorname{rk} N = 2$. Una base di V è data dai vettori A e B corrispondenti alle due colonne linearmente indipendenti della matrice M.

| 2 | |

(b) Sia W l'inviluppo affine di $\mathbb{R}^4$ contenente A, B e C (in altre parole W è il sottospazio affine di dimensione minima contenente A, B e C). Determinare la dimensione di W ed equazioni parametriche di W.

$\dim W = 1$ inoltre $W : \begin{cases} x_1 &= 1 + 4t \\ x_2 &= 2 + 4t \\ x_3 &= 3 + 4t \\ x_4 &= 4 + 4t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$.

Motivazione:

Sappiamo che si ha $W = A + F$ dove F è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $B - A, C - A$. Dalla risposta alla domanda precedente sappiamo che $C - A$ è linearmente dipendente da $B - A$. Quindi $\dim W = \dim F = 1$. Da tutto ciò seguono infine le equazioni parametriche di W:

$$W : \begin{cases} x_1 &= 1 + 4t \\ x_2 &= 2 + 4t \\ x_3 &= 3 + 4t \\ x_4 &= 4 + 4t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $\mathbb{R}^3[x]$ lo spazio dei polinomi $p(x) = ax^2 + bx + c$ di grado minore di 3 a coefficienti reali. Siano dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3[x]$

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}^3[x], p(2) = 0\}, \quad W = \{p(x) \in \mathbb{R}^3[x], p'(2) = 0\},$$

dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

2	

(a) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3[x]$ e determinarne una base.
Motivazione:

La condizione $p(2) = 0$ si può riscrivere come $4a+2b+c = 0$. Abbiamo un sistema omogeneo. Poiché l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale, abbiamo che V è un sottospazio vettoriale. Risolvendo il sistema lineare omogeneo in una equazione e tre incognite si ottiene che $\dim(V) = 2$ e una base di V è $\{x^2 - 4, x - 2\}$.

2	

(b) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3[x]$ e determinarne una base.
Motivazione:

La condizione $p'(2) = 0$ si può riscrivere come $4a + b = 0$. Abbiamo un sistema lineare omogeneo in una equazione e tre incognite. L'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale. Pertanto W è un sottospazio vettoriale. Risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene che $\dim(W) = 2$ e una base di W è $\{x^2 - 4x, 1\}$.

2	

(c) Calcolare la dimensione di $V \cap W$ e, se esiste, determinare una base di $V \cap W$.

$\dim(V \cap W) = 1$. Una base di $V \cap W$ è $\{x^2 - 4x + 4\}$.

Motivazione:

Viste le risposte alle due domande precedenti, i vettori di $V \cap W$ si ottengono considerando le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 4a + 2b + c & = & 0 \\ 4a + b & = & 0 \end{cases}$
Si verifica facilmente che la matrice dei coefficienti del sistema ha rango uguale a 2 e quindi $\dim(V \cap W) = 3 - 2 = 1$. Svolgendo i calcoli si trova che una base di $V \cap W$ è $\{x^2 - 4x + 4\}$.

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k+1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k^2-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esistono una matrice invertibile M e una matrice diagonale D, entrambi quadrate di ordine 3, tali che $D = M^{-1}AM$.

Per $k = \pm 1$.

Motivazione:

Il polinomio caratteristico è $(2-\lambda)^2(-1-\lambda)$, e quindi gli autovalori sono $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 1, e $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica 2. Quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = -1$ (cioè la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1) è uguale a 1. La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ dipende dal rango della matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il rango di tale matrice è 1 se $k = \pm 1$ ed è 2 se $k \neq \pm 1$, allora la matrice A è diagonalizzabile se e solo se $k = \pm 1$, poiché in questo caso la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2.

2

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esistono una matrice invertibile *ortogonale* M e una matrice diagonale D, entrambi quadrate di ordine 3, tali che $D = M^{-1}AM$.

Per $k = -1$.

Motivazione:

Dei valori trovati al punto (a) solo $k = -1$ rende la matrice simmetrica e quindi diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale M.

2

(c) Per ogni valore di k trovato nel punto (a) calcolare M e D.

Motivazione:

Se $k = -1$ si ottiene immediatamente

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $k = 1$ si ottiene

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2)$ e $H := (4, 6)$.

| 2 | |

(a) Determinare delle equazioni parametriche della retta s passante per H e perpendicolare a r.

$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(4 - 1, 6 - 2) = (3, 4)$. Un vettore ad essa perpendicolare ha coordinate $(4, -3)$ e quindi la retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$.

| 2 | |

(b) Determinare il punto B simmetrico del punto A rispetto alla retta s

$B = (7, 10)$

Motivazione:

Il punto B è il punto tale che il punto medio di A e B è la proiezione ortogonale di A sulla retta s. Dal momento che r e s sono ortogonali e $H = r \cap s$, il punto H è la proiezione ortogonale di A su s. E quindi il punto B deve avere coordinate (x, y) tali che $(4, 6) = (\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2})$. Da cui segue $B = (7, 10)$.

| 3 | |

(c) Determinare un punto C appartenente alla retta s tale che il triangolo ABC abbia area uguale a 5.

Uno è il punto $(\frac{24}{5}, \frac{27}{5})$. L'altro è $(\frac{16}{5}, \frac{21}{5})$.

Motivazione:

Il triangolo cercato ABC ha come base il segmento $\overline{AB}$; quest'ultimo ha lunghezza uguale a 10. L'altezza relativa a tale base è il segmento $\overline{CH}$. Sia h la sua lunghezza. Poiché l'area del triangolo deve essere uguale a 5, si deve avere $\frac{1}{2}10 \cdot h = 5$ e quindi $h = 1$.
Il punto generico P di s ha coordinate $(4 + 4t, t - 3t)$. Imponendo $\mathrm{d}(P, H) = 1$ otteniamo $16t^2 + 9t^2 = 1$ e quindi $t = \pm\frac{1}{5}$. Da ciò segue che i punti i punti verificanti le condizioni date sono i punti $(\frac{24}{5}, \frac{27}{5})$ e $(\frac{16}{5}, \frac{21}{5})$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, 2, 3)$ e il piano $\pi : x - 2y + z = 0$ passante per A.
Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro A, raggio uguale a 4 e contenuta nel piano π. Siano infine $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ le sfere di raggio uguale a 5 intersecanti il piano π nella circonferenza $\mathcal{C}$.

2	

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano π.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v} := (1, -2, 1)$ è perpendicolare al piano π. La retta r ha quindi equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$.

2	

(b) Determinare la distanza tra i centri C_1 e C_2 delle sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

$\mathrm{d}(C_1, C_2) = 6$

Motivazione:

I centri C_1 e C_2 delle sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ devono appartenere alla retta r. Sia $h = \mathrm{d}(C_1, A)$. Da momento che la sfera $\mathcal{S}_1$ deve avere raggio uguale a 5 e la circonferenza C_1 deve avere raggio uguale a 4, applicando il teorema di Pitagora dobbiamo avere $25 = 16 + h^2$. Da ciò segue $h = 3$. Analogamente si deve avere $\mathrm{d}(C_2, A) = 3$. E quindi $\mathrm{d}(C_1, C_2) = \mathrm{d}(C_1, A) + \mathrm{d}(C_2, A) = 3 + 3 = 6$.

3	

(c) Determinare le coordinate dei centri C_1 e C_2 delle sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

$C_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, 2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}, 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e $C_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}, 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Motivazione:

Per quel che abbiamo visto nella risposta di (b), i punti C_1 e C_2 devono appartenere alla retta r e avere distanza da A uguale a 3. Cerchiamo quindi questi punti. Sia $P := (1+t, 2-2t, 3+t)$ il punto generico di r. Imponendo che la distanza di P da A sia uguale a 3, otteniamo l'equazione $t^2 + 4t^2 + t^2 = 9$. Le soluzioni sono $t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
E quindi $C_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, 2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}, 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e $C_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}, 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.