COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono vere o mostrare che sono false fornendo un controesempio.

2 (a) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v}_1 = \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$.

Falso.

Motivazione:

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e siano $\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1), \mathbf{v}_3 = (0,2)$. Questi vettori sono linearmente dipendenti poiché

$$0(1,0) + 2(0,1) - (0,2) = (0,0)$$

ma non esistono $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1,0) = \alpha_2(0,1) + \alpha_3(0,2)$$

2 (b) Se esistono $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v}_1 = \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

Vero.

Motivazione:

Siano $\beta_1 = 1, \beta_2 = -\alpha_2, \ldots, \beta_n = -\alpha_n$. Essi sono scalari non tutti nulli (poiché $\beta_1 \neq 0$) e tali che $\beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_1 - \alpha_2\mathbf{v}_2 - \ldots - \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

2. Siano dati i punti $A := (1, 1, 1, 1, 1)$, $B := (1, 2, 3, 4, 5)$ e $C := (5, 4, 3, 2, 1)$ di $\mathbb{R}^5$ e sia r la retta passante per A e B.

2

(a) Determinare la retta r' passante per C e parallela alla retta r.

$$\begin{cases} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 4+t \\ x_3 &= 3+2t \\ x_4 &= 2+3t \\ x_5 &= 1+4t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(1-1, 2-1, 3-1, 4-1, 5-1) = (0, 1, 2, 3, 4)$.

La retta r' ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 4+t \\ x_3 &= 3+2t \\ x_4 &= 2+3t \\ x_5 &= 1+4t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

2

(b) Determinare un' equazione cartesiana dell'iperpiano π passante per C e perpendicolare alla retta r.

$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 20 = 0$

Motivazione:

Un'equazione cartesiana dell'iperpiano π ha coefficienti uguali ai parametri direttori della retta r e quindi è del tipo: $x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$.
Per determinare k imponiamo il passaggio per C. Quindi $1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + k = 0$.
Da cui: $k = -20$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, sia V il suo sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

e sia W il suo sottospazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{w}_1 := (1,0,1,0), \mathbf{w}_2 := (1,1,0,2)$ e $\mathbf{w}_3 := (2,1,1,2)$.

| 2 | |

(a) Determinare, se esistono, una base di V e una base di W.

Base di V: $\{\mathbf{v}_1 := (1,-1,1,0), \mathbf{v}_2 := (-2,-1,0,1)\}$
Base di W: $\{\mathbf{w}_1 := (1,0,1,0), \mathbf{w}_2 := (1,1,0,2)\}$

Motivazione:

La matrice A dei coefficienti del sistema ha il minore formato dalle due righe e dalle prime due colonne invertibile e quindi $\dim V = 4 - \operatorname{rk} A = 4 - 2 = 2$.
Risolvendo il sistema si ottiene che una base di V è $\{\mathbf{v}_1 := (1,-1,1,0), \mathbf{v}_2 := (-2,-1,0,1)\}$.
Cerchiamo ora una base di W. Sia M la matrice avente come colonne le coordinate, relative alla base canonica, dei generatori di W: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Il minore di M formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è invertibile e i due suoi orlati hanno entrambi determinante nullo. E quindi $\operatorname{rk} M = 2$. Una base di W è quindi data da $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

| 3 | |

(b) Determinare, se esistono, una base ortonormale di V e una base ortonormale di W.

Base ortonormale di V: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{51}}(-5,-4,1,3)\}$.
Base ortonormale di W: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{22}}(1,2,-1,4)\}$.

Motivazione:

Determiniamo innanzitutto una base ortogonale del sottospazio V usando l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a partire dalla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
Abbiamo la seguente base: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1}\mathbf{u}_1\} = \{(-2,-1,0,1), (-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1)\}$.
Moltiplicando per 3 il secondo vettore di quest'ultima base otteniamo la seguente base ortogonale $\{(-2,-1,0,1), (-5,-4,1,3)\}$.
Per determinare una base ortonormale dividiamo i due vettori della base ortogonale per la loro norma. Otteniamo la base ortonormale di V: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{51}}(-5,-4,1,3)\}$.
Cerchiamo ora una base ortonormale di W.
Usando il procedimento usato nel caso precedente a partire dalla base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, otteniamo la base ortogonale $\{(1,0,1,0), (1,2,-1,4)\}$.
Dividendo ognuno dei vettori della base ortogonale per la sua norma otteniamo la seguente base ortonormale di W: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{22}}(1,2,-1,4)\}$.

| 2 | |

(c) Verificare se si ha $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Motivazione:

Consideriamo la matrice B avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$.
$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Poiché si ha $\det B \neq 0$, abbiamo $\dim(V+W) = \operatorname{rk} B = 4$. Dalla formula di Grassmann segue $\dim(V \cap W) = 0$. E quindi $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

4. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e sia W uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$.
Sia $f\colon V \to W$ la funzione definita da $f(x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3) = (x+y+k^2-4)\mathbf{w}_1+(2x+ky+z)\mathbf{w}_2-2z\mathbf{w}_3$.

3

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione f è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Per $k = \pm 2$.

Motivazione:

Per essere un omomorfismo i polinomi che descrivono le componenti della funzione devono essere omogenei di primo grado. Si deve quindi avere $k^2 - 4 = 0$, da cui $k = \pm 2$.

2

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione f è un isomorfismo di spazi vettoriali

Per $k = -2$.

Motivazione:

Posto $k = \pm 2$, sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata a f relativamente alle basi date.
Se $k = 2$ si ha $\det A = 0$ e quindi f non è un isomorfismo. Se $k = -2$ si ha $\det A \neq 0$ e quindi f è un isomorfismo.

2

(c) Scelto k tra i valori positivi trovati al punto (a), calcolare la dimensione di $\ker f$ e determinarne, se esiste, una base.

$k = 2$, $\dim \ker f = 1$, base di $\ker f$: $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$

Motivazione:

Poniamo $k = 2$. Sappiamo che abbiamo $\det A = 0$ e quindi $\operatorname{rk} A \leq 2$. D'altronde il minore formato dalle prime due righe e dalla prima e dalla terza colonna è invertibile. E quindi $\operatorname{rk} A = 2$. Da ciò segue $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Osserviamo poi che la prima e la seconda colonna di A sono uguali e quindi $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$ e quindi $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \ker f$. E quindi una base di $\ker f$ è data da $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (4, 6)$.

2 (a) Determinare le coordinate di un punto C tale che il triangolo ABC sia equilatero.

$(\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}, 4 - \frac{3}{2}\sqrt{3})$

Motivazione:

Uno dei punti C cercati deve avere distanza da A e da B uguale a $d(A, B)$. Abbiamo $d(A, B) = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$. E quindi i punti cercati appartengono all'intersezione della circonferenza $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ di centro A e passante per B con la circonferenza $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$ di centro B e passante per A. Risolvendo il sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 & = & 25 \\ (x-4)^2 + (y-6)^2 & = & 25 \end{cases}$ otteniamo i punti $(\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}, 4 - \frac{3}{2}\sqrt{3})$ e $(\frac{5}{2} - 2\sqrt{3}, 4 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$. Scegliamo, per esempio, il primo di questi.

2 (b) Determinare le coordinate di due punti D e E tali che il quadrilatero $ABDE$ sia un quadrato.

$D = (8, 3)$, $E = (5, -1)$

Motivazione:

La retta r passante per A e B ha parametri direttori $(3, 4)$ e quindi la retta s passante per A e perpendicolare a r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x & = & 1 + 4t \\ y & = & 2 - 3t \end{cases}$. I punti della retta s aventi distanza da A uguale a 5 si ottengono ponendo $t = \pm 1$. Scegliendo $t = 1$ otteniamo $E = (5, -1)$. Consideriamo il punto medio $M = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$ dei punti E e B. Il quarto vertice D del quadrato $ABDE$ è il punto $D = (8, 3)$.

3 (c) Determinare le equazioni della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al quadrato $ABDE$.

Circonferenza circoscritta $(x - \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$.
Circonferenza inscritta $(x - \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

Motivazione:

La circonferenza circoscritta e la circonferenza inscritta hanno il centro nel punto M.
La circonferenza circoscritta ha raggio uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2} d(A, B) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ e ha quindi equazione $(x - \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$.
La circonferenza inscritta ha raggio uguale a $\frac{1}{2} d(A, B) = \frac{5}{2}$ e ha quindi equazione $(x - \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, si considerino i punti $A := (1, 1, -1)$, $B := (-1, -1, 1), C := (-2, 1, 0)$ e $D := (1, 2, 3)$.

2	

(a) Determinare il piano π passante per A, B e C e la sfera $\mathcal{S}$ di centro D e raggio uguale a 6.

$\pi : x + 2y + 3z = 0 \quad ; \quad \mathcal{S} : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$

Motivazione:

Il piano π ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -1-1 & -1-1 & 1-(-1) \\ -2-1 & 1-1 & 0-(-1) \end{vmatrix} = 0.$

Quindi $\pi : x + 2y + 3z = 0$.

La sfera $\mathcal{S}$ ha ovviamente equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$.

2	

(b) Determinare raggio e centro della circonferenza $\mathcal{C}$ intersezione della sfera $\mathcal{S}$ con il piano π.

Raggio uguale a $\sqrt{22}$.
Centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento.

Motivazione:

Abbiamo $\mathrm{d}(D, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3|}{\sqrt{1+4+9}} = \sqrt{14}$.

E quindi il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ è uguale a $\sqrt{36 - 14} = \sqrt{22}$.

Il centro della circonferenza coincide con la proiezione ortogonale del centro D della sfera sul piano π. La retta r passante per D e perpendicolare a π ha equazioni parametriche:

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ Introducendo le coordinate del punto generico di r nell'equazione del piano π otteniamo $t = -1$ e quindi il centro della circonferenza coincide con l'origine del sistema di riferimento.

3	

(c) Determinare, se esiste, una sfera diversa da $\mathcal{S}$ di raggio uguale a 6 intersecante il piano π nella circonferenza $\mathcal{C}$.

$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 36$

Motivazione:

La sfera cercata ha centro nel simmetrico del punto D rispetto al centro O della circonferenza $\mathcal{C}$. Quindi il suo centro è $D' = (-1, -2, -3)$.

La sua equazione è perciò $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 36$.