21 febbraio 2018 - Soluzione esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria gestionale - a.a. 2017-2018

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ verificare se si tratta di un sottospazio vettoriale e, in caso positivo, determinarne una base.

2 (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Una sua base è $\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)\}$.

Motivazione:

L'insieme V è un sottospazio vettoriale perché le coordinate dei suoi vettori relative alla base canonica verificano un'equazione omogenea di primo grado. Si ottiene una base di V determinando le soluzioni dell'equazione $x + y - z = 0$, da cui $x = -y + z$.
Le soluzioni sono quindi $\{(x, y, z) \mid x = -t_1 + t_2, y = t_1, z = t_2\}$ con $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}$.
Ponendo prima $t_1 = 1, t_2 = 0$ e poi $t_1 = 0, t_2 = 1$, otteniamo due vettori che formano una base di V.

2 (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x - 2y + z + 1 = 0\}$

W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Motivazione:

L'insieme W non è un sottospazio vettoriale. Infatti il vettore nullo, non verificando l'equazione $x - 2y + z + 1 = 0$, non è contenuto in W.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto P_0 di coordinate $(1,1,1,1)$, il punto P_1 di coordinate $(3,2,4,2)$, il punto P_2 di coordinate $(1,2,3,2)$, il punto P_3 di coordinate $(1,1,1,3)$, il punto P_4 di coordinate $(1,1,1,2)$ e il punto P_5 di coordinate $(1,1,1,4)$.

2	

(a) Determinare una base dello spazio vettoriale V generato da $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

La base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Motivazione:

La matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo la prima colonna alla seconda, terza, quarta, quinta e sesta colonna otteniamo la matrice A' avente rango uguale a quello della matrice A.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il minore di A' formato dalle quattro righe e dalle prime quattro colonne è invertibile e quindi $\operatorname{rk} A' = 4$. Segue $\dim V = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 4$. Pertanto $V = \mathbb{R}^4$ e quindi una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

2	

(b) Determinare la dimensione del sottospazio affine Π contenente i punti $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

La dimensione è uguale a 3.

Motivazione:

La matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$, $P_4 - P_0, P_5 - P_0$ è:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice M ha rango uguale a 3 poiché la quarta e la quinta colonna sono chiaramente multiple della terza e il minore formato dalle prime tre colonne e dalla prima, seconda e quarta riga è chiaramente invertibile. Ne segue che il sottospazio affine Π ha dimensione uguale a 3.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3[x]$ (polinomi in una variabile a coefficienti reali di grado minore di 3):
$V = \{p(x) \in \mathbb{R}^3[x] \mid p(-1) = 0\} \quad W = \{q(x) \in \mathbb{R}^3[x] \mid q(-2) = 0\}$.

2	

(a) Determinare una base di V e una base di W.

Base di V: $\{\mathbf{v}_1 = x^2 - 1, \mathbf{v}_2 = x + 1\}$.
Base di W: $\{\mathbf{w}_1 = x^2 - 4, \mathbf{w}_2 = x + 2\}$.

Motivazione:

Cerchiamo i vettori di V. Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$. Si deve avere $p(-1) = a - b + c = 0$ e quindi $c = -a + b$. Una base di V è data da $\{\mathbf{v}_1 = x^2 - 1, \mathbf{v}_2 = x + 1\}$.
Cerchiamo i vettori di W. Sia $q(x) = a'x^2 + b'x + c'$. Si deve avere $q(-2) = 4a' - 2b' + c' = 0$ e quindi $c' = -4a' + 2b'$. Una base di Wè data da $\{\mathbf{w}_1 = x^2 - 4, \mathbf{w}_2 = x + 2\}$.

3	

(b) Determinare la dimensione di $V + W$ e la dimensione di $V \cap W$.

$\dim(V + W) = 3 \quad \dim(V \cap W) = 1$.

Motivazione:

Si ha $\dim(V + W) = \operatorname{rk} M$ dove M è la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori delle basi di V e di W, relative alla base $\{x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}^3$. Si ha:
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ Il determinante del minore formato dalle prime tre colonne di M è uguale a -3 e quindi $\operatorname{rk} M = 3$. Pertanto $\dim(V + W) = 3$.
Dalla formula di Grassmann segue $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$.

2	

(c) Determinare una base di un sottospazio V' supplementare di V in $\mathbb{R}^3[x]$.

$\{1 + x + x^2\}$.

Motivazione:

Dal momento che si ha $\dim V = 2$ e $\dim \mathbb{R}^3[x] = 3$, si deve avere $\dim V' = 1$. Per determinare una base di un supplementare di V è sufficiente quindi prendere un qualsiasi vettore non appartenente a V. Consideriamo $r(x) = 1 + x + x^2$. Poiché $r(-1) = 1 \neq 0$ si ha $r(x) \notin V$. Il sottospazio avente come base $r(x)$ è un supplementare di V. Abbiamo quindi determinato una base di un supplementare di V.

4. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, alla matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Determinare una base di $\ker f$.

$\{\mathbf{v}_1 = (1,1,1)\}$

Motivazione:

Determiniamo tutti i vettori di $\ker f$ risolvendo l'equazione matriciale $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si ottiene il sistema $\begin{cases} -4a+2b+2c &= 0 \\ 2a-4b+2c &= 0 \\ 2a+2b-4c &= 0 \end{cases}$ che ha come soluzioni $\{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Ponendo $t = 1$ abbiamo una base di $\ker f$.

| 2 | |

(b) Determinare, se esiste, una base che sia formata da autovettori di f.

$\{\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (-1,1,0), \mathbf{v}_3 = (-1,0,1)\}$.

Motivazione:

Si ha $\det(A - xI) = -x(-6-x)^2$ e quindi gli autovalori sono 0 con molteplicità 1 e -6 con molteplicità 2. Abbiamo già visto nella risposta precedente che una base dell'autospazio relativo all'autovalore 0 (cioè il nucleo di f) è data da $\{\mathbf{v}_1 = (1,1,1)\}$.

Determiniamo tutti i vettori dell'autospazio relativo all'autovalore -6 risolvendo l'equazione matriciale $(A+6I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ha il sistema $\begin{cases} 2a+2b+2c &= 0 \\ 2a+2b+2c &= 0 \\ 2a+2b+2c &= 0 \end{cases}$ che ha come soluzioni $\{(-t_1 - t_2, t_1, t_2) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$. Una base per l'insieme delle soluzioni è $\{\mathbf{v}_2 = (-1,1,0), \mathbf{v}_3 = (-1,0,1)\}$.

E quindi una base di autovettori è $\{\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (-1,1,0), \mathbf{v}_3 = (-1,0,1)\}$.

| 3 | |

(c) Determinare, se esiste, una base ortonormale che sia formata da autovettori di f.

$\{\mathbf{w}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \mathbf{w}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \mathbf{w}_3 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$.

Motivazione:

Poiché la matrice A è simmetrica esiste una base ortonormale formata da autovettori. Per determinarla cerchiamo una base ortonormale per ognuno dei due autospazi. L'autospazio relativo a 0 ha come base ortonormale $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Usando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo la seguente base ortonormale dell'autospazio relativo a -6: $\{\mathbf{w}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \mathbf{w}_3 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$.

Una base ortonormale di autovettori è quindi
$\{\mathbf{w}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \mathbf{w}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \mathbf{w}_3 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto A di coordinate $(5, 5)$, il punto B di coordinate $(-1, 9)$ e il punto C di coordinate $(1, -1)$.

| 2 | |

(a) Verificare se il triangolo di vertici A, B e C è rettangolo.

Il triangolo è rettangolo nel vertice A.

Motivazione:

Un vettore direttore della retta passante per A e B è $\mathbf{v}_1 = (-1-5, 9-5) = (-6, 4)$.
Analogamente un vettore direttore della retta passante per A e C è $\mathbf{v}_2 = (-4, -6)$.
Poiché il prodotto scalare tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è nullo, il triangolo è rettangolo in A.

| 3 | |

(b) Descrivere tramite disequazioni la regione di piano data dai punti interni al triangolo di vertici A, B e C

$$\begin{cases} 2x+3y-25 & < & 0 \\ 3x-2y-5 & < & 0 \\ 5x+y-4 & > & 0 \end{cases}$$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si vede che la retta r_{AB} passante per i punti A e B ha equazione $2x+3y-25=0$. Il punto C appartiene al semipiano $2x+3y-25<0$ delimitato dalla retta r_{AB}. Questa è una delle tre disequazioni che caratterizzano i punti interni del triangolo.
Analogamente si vede che la retta r_{AC} passante per i punti A e C ha equazione $3x-2y-5=0$ e che il punto B appartiene al semipiano $3x-2y-5<0$ delimitato dalla retta r_{AC}.
Il terzo semipiano è dato dalla disequazione $5x+y-4>0$.
Le tre disequazioni appena determinate caratterizzano i punti interni del triangolo.

| 2 | |

(c) Determinare le coordinate dell'ortocentro del triangolo ABC.

$H = A = (5, 5)$.

Motivazione:

L'ortocentro di un triangolo è il punto di intersezione delle sue altezze.
Poiché il triangolo è rettangolo in A, questo punto coincide con l'ortocentro. Infatti, la retta passante per A e B e la retta passante per A e C sono altezze del triangolo rispettivamente alla base AC e alla base AB. Queste due rette ovviamente si intersecano in A.
Quindi $H = A = (5, 5)$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti A di coordinate $(0, 1, 1)$, B di coordinate $(2, 2, 1)$, C di coordinate $(2, -3, -1)$ e D di coordinate $(-2, h-2, h-1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2 (a) Determinare tutti valori di h per i quali i quattro punti siano complanari.

$h = 2$

Motivazione:

La matrice ottenuta sottraendo le coordinate di A dalle coordinate di B, C e D è:
$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & h-3 & h-2 \end{pmatrix}$.
Si ha $\det M = 0$ se e solo se $h = 2$. E quindi i quattro punti sono complanari se e solo se $h = 2$.

2 (b) Determinare le coordinate del punto A' simmetrico di A rispetto al punto B.

$A' = (4, 3, 1)$

Motivazione:

Il punto A' deve essere il punto tale che il punto medio di A e A' è il punto B.
Pertanto, indicate con (x, y, z) le coordinate del punto A' che cerchiamo, si deve avere $(\frac{0+x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{1+z}{2}) = (2, 2, 1)$. Da cui segue $x = 4, y = 3, z = 1$ e quindi $A' = (4, 3, 1)$.

3 (c) Posto $h = 4$, determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti B e D e perpendicolare al piano α passante per A, B e C.

$\pi : 2x + 11y + 4z - 30 = 0$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si ottiene un'equazione cartesiana del piano $\alpha : x - 2y + 5z - 3 = 0$.
Ogni piano passante per i punti B e D, di coordinate $(-2, 2, 3)$, contiene la retta r passante per B e D. Svolgendo i calcoli si ottiene $r : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{cases}$.
Il fascio di piani contenenti la retta r ha equazioni $h(y-2) + k(x + 2z - 4) = 0$, ovvero $kx + hy + 2kz - 2h - 4k = 0$, al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Imponendo la perpendicolarità con il piano α si ottiene $1 \cdot k + (-2) \cdot h + 5 \cdot (2k) = 0$. Da cui $h = \frac{11}{2}k$.
E quindi si ottiene il piano $\pi : 2x + 11y + 4z - 30 = 0$.