18 giugno 2018 - Soluzione esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria gestionale - a.a. 2017-2018

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato un sistema di riferimento affine nel piano, sia dato il punto A di coordinate $(1, 2)$ sia r la retta passante per A parallela all'asse delle ordinate.

2 (a) Determinare la disequazione che definisce il semipiano delimitato dalla retta r che **NON** contiene l'origine O del sistema di riferimento.

$x - 1 > 0$

Motivazione:

L'asse delle ordinate ha equazione $x = 0$. La retta r ha equazione del tipo $x + a = 0$. Imponendo il passaggio per il punto A abbiamo $a = -1$. I semipiani delimitati dalla retta r sono definiti dalle disequazioni $x - 1 > 0$ e $x - 1 < 0$. Le coordinate dell'origine non verificano la prima disequazione e quindi $x - 1 > 0$ è la disequazione cercata.

2 (b) Determinare le condizioni soddisfatte da tutti e soli i punti interni al triangolo di vertici O, A e B, dove B è il punto di intersezione della retta r con l'asse delle ascisse.

$$\begin{cases} x - 1 & < & 0 \\ y & > & 0 \\ 2x - y & > & 0 \end{cases}$$

2	

2. (a) Ogni matrice A di ordine 2 a elementi reali avente solo due autovalori, uno uguale a 4 e l'altro uguale a 5, è diagonalizzabile? Nel caso in cui la risposta sia positiva dimostrarlo. Nel caso in cui nessuna di esse lo sia, dimostrarlo. Nel caso in cui alcune siano diagonalizzabili e altre no, determinare un esempio di una tale matrice non diagonale che sia diagonalizzabile e un esempio di una tale matrice non diagonalizzabile. Giustificare le risposte.

Ogni matrice di questo tipo è diagonalizzabile.

Motivazione:

Si consideri la matrice A come un endomorfismo. Si determina un autovettore $\mathbf{v}_1$, relativo all'autovalore 4 e un autovettore $\mathbf{v}_2$, relativo all'autovalore 5. La teoria ci dice che questi due autovettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base dello spazio vettoriale. La matrice associata all'endomorfismo relativamente a questa base è diagonale e quindi la matrice A è diagonalizzabile.

2	

(b) Ogni matrice A di ordine 3 a elementi reali avente solo due autovalori, uno uguale a 4 e l'altro uguale a 5, è diagonalizzabile? Nel caso in cui la risposta sia positiva dimostrarlo. Nel caso in cui nessuna di esse lo sia, dimostrarlo. Nel caso in cui alcune siano diagonalizzabili e altre no, determinare un esempio di una tale matrice non diagonale che sia diagonalizzabile e un esempio di una tale matrice non diagonalizzabile. Giustificare le risposte.

Alcune matrici sono diagonalizzabili, altre no.

Motivazione:

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha come autovalori 4 (con molteplicità algebrica 1) e 5 (con molteplicità algebrica 2) poiché è triangolare.
Prendiamo un autovettore $\mathbf{v}_1$ con autovalore 4. Prendiamo poi gli autovettori $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$. Questi formano una base dell'autospazio relativo all'autovalore 5. La teoria ci dice che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori. E quindi la matrice A è diagonalizzabile.
La matrice: $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ha come autovalori 4 (con molteplicità algebrica 1) e 5 (con molteplicità algebrica 2) poiché è triangolare. Ma l'autospazio relativo all'autovalore 5 ha dimensione 1, che è minore della molteplicità algebrica dell'autovalore 5. E quindi la matrice B non è diagonalizzabile.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 2k^2 - 4k\}.$$

Sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 3, 1)$ e $\mathbf{v} := (2, 1, 1)$

2

(a) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

$k = 0$ e $k = 2$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $2k^2 - 4k = 0$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 0$

3

(b) Determinare una base per $E_k \cap F$.

$(9, 7, 5)$

Motivazione:

Il sottospazio F è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(1, 3, 1) + \beta(2, 1, 1) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta, \alpha + \beta).$$

Il vettore $(\alpha+2\beta, 3\alpha+\beta, \alpha+\beta)$ appartiene a E_k se e solo se $(\alpha+2\beta)-2(3\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = 0$, cioè $-4\alpha + \beta = 0$, vale a dire $\beta = 4\alpha$.
Dunque $E_k \cap F = \{(9\alpha, 7\alpha, 5\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Una base per $E_k \cap F$ si ottiene scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1$.

2

(c) Determinare una base ortonormale di E_k rispetto al prodotto scalare standard.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ k+3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

3

(a) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

ogni valore di k

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A_k è uguale a $-(1-x)(4-x)^2x$ qualunque sia k. I suoi autovalori sono, dunque, 0, 1 e 4. Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione degli autospazi:

$$\begin{aligned} \dim E(0) &= 4 - \mathrm{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 1 \text{ qualunque sia } k, \\ \dim E(4) &= 4 - \mathrm{rk}(A_k - 4 \cdot I) = 2 \text{ qualunque sia } k, \\ \dim E(1) &= 4 - \mathrm{rk}(A_k - 1 \cdot I) = 1 \text{ qualunque sia } k. \end{aligned}$$

Dunque la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale all'ordine della matrice, cioè a 4, per ogni valore di k.

1

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = -3$

Motivazione:

Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A è simmetrica se e solo se $k = -3$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = -3$

3

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$$D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia data la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $(x-5)^2+(y-3)^2-9=0$.

3	

(a) Scrivere le equazioni delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal punto O, origine del sistema di riferimento.

Le rette tangenti hanno equazioni $y=0$ e $15x-8y=0$.

Motivazione:

La circonferenza ha centro nel punto C di coordinate $(5,3)$ e raggio uguale a 3. Il fascio di rette passanti per O ha equazione $ax+by=0$. Ricordando che una retta tangente a una circonferenza ha distanza dal suo centro uguale al raggio, imponiamo che la distanza di C dalla retta sia uguale a 3. Quindi $\frac{|5a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3$ ovvero $(5a+3b)^2=3^2(a^2+b^2)$. Le soluzioni di questa equazione sono $a=0$ e $a=-\frac{15}{8}b$. Le rette tangenti hanno quindi equazioni $y=0$ e $15x-8y=0$.

2	

(b) Scrivere un'equazione cartesiana della retta r passante per il centro C della circonferenza $\mathcal{C}$ perpendicolare alla retta s passante per i punti $P_1 := (2,3)$ e $P_2 := (1,1)$.

$x+2y-11=0$

Motivazione:

La retta s ha parametri direttori uguali a $(2-1, 3-1)=(1,2)$.
La generica retta ortogonale alla retta s ha equazione $x+2y+c=0$. Imponendo il passaggio per C si ottiene $5+6+c=0$ da cui $c=-11$.

2	

(c) Determinare tutti i punti B sull'asse delle ascisse tale che il triangolo OBC abbia area uguale a 21.

$(-14,0)$ e $(14,0)$

Motivazione:

Siano (b, O), le coordinate del punto B. La base OB ha lunghezza uguale a $|b|$. Qualunque sia la posizione del punto B l'altezza del triangolo relativa al lato OB è $h=3$.
Si deve avere $\frac{1}{2}3|b|=21$, da cui $b=\pm 14$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto A di coordinate $(1, 2, -1)$, il punto B di coordinate $(2, -1, 1)$ e il piano π di equazione $2x + y - z = 0$.

2	

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per i punti A e B.

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r ha come parametri direttori $(2-1, -1-2, 1+1) = (1, -3, 2)$ e quindi ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Da queste equazioni si ottengono equazioni cartesiane della retta r, ad esempio $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$

2	

(b) Scrivere un'equazione cartesiana del piano α passante per i punti A e B e parallelo al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$.

$3x - y - 3z - 4 = 0$

Motivazione:

Il piano α è parallelo anche al vettore $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$. Un'equazione cartesiana del piano α si ottiene sviluppando la seguente uguaglianza: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Un'equazione del piano α è quindi: $3x - y - 3z - 4 = 0$

3	

(c) Determinare la distanza tra i piani π_1 e π_2, entrambi paralleli al piano π, e passanti rispettivamente per il punto A e per il punto B.

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

Motivazione:

La distanza richiesta è la distanza del punto A dal piano π_2 o anche del punto B dal piano π_1. Un piano parallelo al piano π ha equazione $2x + y - z + d = 0$. Imponendo il passaggio per il punto A e risolvendo si ottiene l'equazione del piano π_1: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + d = 0$ da cui $d = -5$ e $2x + y - z - 5 = 0$. Quindi, la distanza richiesta è $\frac{|2 \cdot 2 + (-1) - 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.