COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia B una matrice di ordine 3. Sia g l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice B relativamente alla base canonica.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 | (a) Se la prima riga di B è la metà della terza riga di B allora esistono due vettori distinti di $\mathbb{R}^3$ aventi la stessa immagine rispetto a g.

Vera.

Motivazione:

Dal momento che la prima e la terza riga di B sono proporzionali, si ha $\det B = 0$. E quindi $\operatorname{rk} B = \dim f(\mathbb{R}^3) < 3$. E quindi, per la formula $3 = \dim \ker f + \dim g(\mathbb{R}^3)$, si ha $\dim \ker g > 0$. Esiste quindi un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \ker g$. E allora il vettore nullo e il vettore v hanno la stessa immagine.

2 | (b) Se esistono due vettori distinti di $\mathbb{R}^3$ aventi la stessa immagine rispetto a g, allora la prima riga di B è la metà della terza riga di B.

Falsa.

Motivazione:

Diamo un controesempio.

L'endomorfismo associato alla matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ha i vettori $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ e il vettore nullo che hanno la stessa immagine. Ma la prima riga di B non è la metà della terza riga di B.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati l'iperpiano $\Pi : x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 = 0$ e i punti A di coordinate $(2, 1, 3, 0)$ e B di coordinate $(4, 1, 0, k)$.

2	

(a) Per quali valori di k i punti A e B stanno in semispazi opposti rispetto all'iperpiano Π?

$k > 4$

Motivazione:

I due semispazi delimitati da Π sono definiti dalle disequazioni $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 > 0$ e $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 < 0$.

Sostituendo le coordinate del punto A nel polinomio $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3$ otteniamo $2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 0 + 3 = 8$. Il risultato è positivo, dunque A appartiene al semispazio $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 > 0$.
Sostituendo le coordinate del punto B nel polinomio $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3$ otteniamo $4 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - k + 3 = 4 - k$.
I punti A e B stanno in semispazi opposti rispetto all'iperpiano Π se e solo se $4 - k < 0$ cioè se e solo se $k > 4$.

2	

(b) Per quali valori di k esiste un iperpiano parallelo a Π e contenente A e B?

$k = -4$

Motivazione:

Il generico iperpiano parallelo a Π ha equazione del tipo $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + h = 0$. Imponendo il passaggio per A otteniamo $2-3\cdot 1+2\cdot 3-0+h = 0$ da cui otteniamo $h = -5$. L'iperpiano cercato ha quindi equazione $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 5 = 0$. Imponendo che B appartenga a tale iperpiano troviamo la condizione $4-3\cdot 1+2\cdot 0-k-5 = 0$ da cui ricaviamo $k = -4$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali U, generato dai vettori $\mathbf{u}_1 := (0,2,1,1)$ e $\mathbf{u}_2 := (1,1,0,3)$, e V, generato dai vettori $\mathbf{v}_1 := (2,2,1,0)$ e $\mathbf{v}_2 := (-1,3,1,5)$.

| 3 | |

(a) Determinare una base per $U \cap V$.

$\{(1,5,2,5)\}$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ non sono multipli uno dell'altro, quindi formano una base per U e $\dim U = 2$. Analogamente $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formano una base per V e $\dim V = 2$.
Un vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $U \cap V$ se e solo se si può esprimere come combinazione lineare sia dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ che dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, cioè se e solo se esistono α, β, γ e δ tali che

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha(0,2,1,1) + \beta(1,1,0,3)\\ \mathbf{v} &= \gamma(2,2,1,0) + \delta(-1,3,1,5)\end{aligned}$$

Uguagliando componente per componente queste espressioni troviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \beta = 2\gamma - \delta \\ 2\alpha + \beta = 2\gamma + 3\delta \\ \alpha = \gamma + \delta \\ \alpha + 3\beta = 5\delta \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(2h, h, h, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Dunque $U \cap V$ ha dimensione 1 e, prendendo ad esempio $h = 1$, ha una base formata dal vettore $2 \cdot (0,2,1,1) + 1 \cdot (1,1,0,3) = (1,5,2,5)$.

| 2 | |

(b) Determinare una base di $U + V$.

$\{(0,2,1,1),\ (1,1,0,3),\ (2,2,1,0)\}$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $\dim U = \dim V = 2$ e $\dim(U \cap V) = 1$. Per la formula di Grassmann si ha allora $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3$.
I vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ generano $U+V$. Estraiamo da essi una base di $U+V$: i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ formano una base di U e sono quindi linearmente indipendenti. Se $\mathbf{v}_1$ fosse combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, dovrebbe appartenere a $U \cap V$: così non è perché non è multiplo del vettore che abbiamo trovato come risposta al punto precedente. Pertanto $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_1$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $U + V$.

| 2 | |

(c) Determinare una base per un sottospazio supplementare di $U + V$ in $\mathbb{R}^4$.

$\{(1,0,0,0)\}$

Motivazione:

Al punto precedente abbiamo trovato una base di $U+V$: completiamola a una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo far ciò scegliendo in maniera opportuna un vettore da una base qualunque, ad esempio la base canonica. Proviamo a uno a uno tali vettori finché ne troviamo uno che non sia combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_1$. Poiché $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 possiamo prendere il vettore $\mathbf{e}_1 := (1,0,0,0)$. Il sottospazio che ha per base $\mathbf{e}_1$ è allora un supplementare di $U+V$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare una base dell'immagine di f.

$\{(1, 0, 0, 2),\ (0, -2, 2, 0)\}$

Motivazione:

Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti perché non sono una multipla dell'altra. La terza colonna è l'opposta della seconda e la quarta è 2 volte la prima. Dunque le prime due colonne di A formano una base per lo spazio vettoriale generato dalle colonne. La matrice A ha, pertanto, rango 2 e i vettori le cui coordinate rispetto alla base canonica corrispondono alle prime due colonne di A formano una base per l'immagine di f.

2

(b) Determinare una base del nucleo di f.

$\{(0, 1, 1, 0),\ (-2, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$
Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che quindi è sufficiente considerare due equazioni linearmente indipendenti. Possiamo prendere, ad esempio, le prime due e ottenere il sistema equivalente
$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$
Trattando x_3 e x_4 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(-2k, h, h, k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $(0, 1, 1, 0)$ e $(-2, 0, 0, 1)$.

3

(c) Determinare (nel caso esistano) una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti A di coordinate $(6, 2)$, B di coordinate $(8, 4)$ e C di coordinate $(18 - 2h, 2 + 2h)$.

2	

(a) Determinare i valori di h per cui i tre punti A, B e C risultano allineati.

$h = 3$

Motivazione:

I tre punti sono allineati se i parametri direttori $(2, 2)$ della retta passante per i punti A e B e i parametri direttori $(12 - 2h, 2h)$ della retta passante per i punti A e C sono linearmente dipendenti. Dalla condizione $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 12 - 2h & 2h \end{pmatrix} = 0$ si ha $h = 3$.

2	

(b) Posto $h = 0$, calcolare l'area del triangolo ABC.

Area $= 12$

Motivazione:

Per $h = 0$, le coordinate del punto C sono $(18, 2)$. Il segmento AC giace sulla retta r di equazione $y = 2$, per cui la sua misura è 12. La distanza del punto B dalla retta r è uguale a 2, quindi si ha Area $= \frac{1}{2} 12 \cdot 2 = 12$.

3	

(c) Posto $h = 0$, determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti A, B e C.

$(x - 12)^2 + (y + 2)^2 = 52$

Motivazione:

Determiniamo il centro della circonferenza:
l'equazione dell'asse a_1 del segmento AC è $x = 12$,
l'equazione dell'asse a_2 del segmento AB è $x + y - 10 = 0$.
Il centro K della circonferenza è la soluzione del sistema formato dalle equazioni di a_1 e a_2.
Quindi le coordinate di K sono $(12, -2)$,
Il raggio r della circonferenza è la distanza tra i punti A e K.
Quindi $r = \sqrt{(12 - 6)^2 + (-2 - 2)^2} = 2\sqrt{13}$.
L'equazione della circonferenza è $(x - 12)^2 + (y + 2)^2 = 52$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il piano $\pi : 2x - 2y - z + 5 = 0$, la sfera $S : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$ e il punto A di coordinate $(1, 0, 0)$.

2

(a) I piani tangenti a S e paralleli a π hanno equazione cartesiana:

$2x - 2y - z + 18 = 0 \qquad 2x - 2y - z - 12 = 0$

Motivazione:

Il generico piano parallelo a π ha equazione $\pi : 2x - 2y - z + k = 0$. Imponendo che la distanza di questo generico piano dal centro $C := (2, 3, 1)$ della sfera sia uguale al raggio della sfera otteniamo l'equazione:

$$\frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 5,$$

vale a dire $\frac{|k-3|}{3} = 5$, le cui soluzioni sono $k = 18$ e $k = -12$, che danno le equazioni dei piani cercati.

2

(b) I piani paralleli a π che intersecano S in una circonferenza di raggio 3 hanno equazione cartesiana:

$2x - 2y - z + 15 = 0 \qquad 2x - 2y - z - 9 = 0$

Motivazione:

Un piano che interseca una sfera, la interseca in una circonferenza γ il cui centro H è la proiezione ortogonale sul piano del centro C della sfera. Detto allora P un punto qualsiasi della circonferenza γ, il triangolo CHP è un triangolo rettangolo in H. L'ipotenusa CP ha lunghezza uguale al raggio R della sfera, il cateto HP ha lunghezza uguale al raggio r della circonferenza e il cateto CH ha lunghezza uguale alla distanza d del piano dal centro della sfera. Dunque si ha, per il teorema di Pitagora, $R^2 = r^2 + d^2$.
Nel nostro caso sappiamo che $R = 5$ e $r = 3$: ricaviamo dunque $d = 4$. I piani cercati sono, pertanto, i piani paralleli a π la cui distanza dal centro C della sfera sia uguale a 4. Uguagliando a tale valore la distanza tra il piano generico parallelo a π e C trovata al punto precedente, otteniamo l'equazione $\frac{|k-3|}{3} = 4$, le cui soluzioni sono $k = 15$ e $k = -9$, che danno le equazioni dei piani cercati.

3

(c) Il piano σ passante per A, ortogonale a π e che interseca S in una circonferenza di raggio massimo possibile ha equazione cartesiana:

$-x + 3y - 8z + 1 = 0$

Motivazione:

Un piano interseca una sfera in una circonferenza di raggio massimo se e solo se passa per il centro della sfera. Dato il piano generico di equazione $ax+by+cz+d = 0$, imponendo allora il passaggio per A, il passaggio per il centro C della sfera e l'ortogonalità con π troviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} a \phantom{{}+3b+c} + d = 0 \\ 2a + 3b + c + d = 0 \\ 2a - 2b - c \phantom{{}+d} = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono del tipo $(a, b, c, d) = (-h, 3h, -8h, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Scegliendo, ad esempio, $h = 1$ troviamo che l'equazione del piano cercato è $-x + 3y - 8z + 1 = 0$.