COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 | (a) Comunque sia fissato un vettore $\mathbf{v} \in E$, l'insieme $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_4 + \mathbf{v}\}$ è una base di E.

Falso.

Motivazione:

Falso. Controesempio. Se $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_2$ allora l'insieme:
$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_4 + \mathbf{v}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_2\}$ non è ovviamente una base di E perché contiene il vettore nullo.

2 | (b) Comunque siano fissati i numeri reali k_2, k_3, k_4, l'insieme $\{\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è una base di E.

Vero.

Motivazione:

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate dei quattro vettori relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ha determinante uguale a 1 e quindi è invertibile. Da ciò segue che i quattro vettori formano una base di E.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1,2,3,4)$ e l'iperpiano $\Sigma : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.

2	

(a) Determinare il punto B di intersezione dell'iperpiano Σ con la retta r passante per A e perpendicolare a Σ.

$B = (0,0,0,0)$

Motivazione:

La retta r ha equazioni parametriche $r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + 2t \\ x_3 = 3 + 3t \\ x_4 = 4 + 4t \end{cases}$

Inserendo le coordinate del punto generico di r nell'equazione di Σ otteniamo $t = -1$ e quindi $B = (0,0,0,0)$.

2	

(b) Determinare la semiretta aperta con origine in B e passante per A.

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 4t \end{cases} \quad \text{con } t > 0.$$

Motivazione:

La semiretta cercata è data da tutti i punti $\{P = B + t(A - B) \mid t > 0\}$.

Da cui: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 4t \end{cases}$ con $t > 0$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a+bx+cx^2) = a+2c+(2a+c)x+(a+2c)x^2$.

2	

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Abbiamo $f(1) = 1+2x+x^2, f(x) = 0, f(x^2) = 2+x+2x^2$.
Quindi $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3	

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$\{x\}$
3	$\{1+x+x^2\}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A ha come radici 0 e 3.
Per trovare una base di $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0 \cdot I$:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, h, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.
Per trovare una base di $E(3)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 3 \cdot I$:

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono (h, h, h) con h parametro reale. Una base di $E(3)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

2	

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Le matrici D e M non esistono.

Motivazione:

Poiché l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2 e l'autospazio $\dim E(0) = 1$, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile. Pertanto le matrici D e M non esistono.

4. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema:

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3x + 6y + kz = 3 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \end{cases}$$

2 | (a) Determinare tutti i valori di k per i quali il sistema ammette una sola soluzione.

Nessun valore di k.

Motivazione:

Il sistema S ha una e una sola soluzione se e solo se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & k \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dei coefficienti di S è invertibile. Si ha $\det A = 0$ per ogni k poiché la matrice A ha la prima e la terza riga proporzionali. E quindi per nessun valore di k il sistema ha una ed una sola soluzione.

2 | (b) Determinare tutti i valori di k per i quali il sottospazio affine delle soluzioni di S ha dimensione uguale a 2.

$k = 9$.

Motivazione:

La colonna dei termini noti di S è uguale alla prima colonna di A. Quindi $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$ per ogni k, dove A' è la matrice completa del sistema S. Quindi S ha soluzioni e $\dim Sol(S) = 3 - \operatorname{rk} A$. Si ha $\operatorname{rk} A = 1$ se e solo se $k = 9$. Infatti per $k = 9$ la prima e la seconda riga di A sono proporzionali mentre per $k \neq 9$ si ha $\operatorname{rk} A = 2$ perché il minore formato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna è invertibile.

3 | (c) Posto $k = 0$, determinare tutte le soluzioni del sistema.

$\{(1 - 2t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda b) segue che per $k = 0$ il sottospazio affine delle soluzioni ha dimensione uguale a 1. Dal momento che la terza equazione è il doppio della prima, il sistema si riduce alle prime due equazioni. Sottraendo alla seconda equazione la prima moltiplicata per 3 otteniamo $z = 0$. Dalla prima otteniamo allora $x = 1 - 2y$ e quindi le soluzioni sono $\{(1 - 2t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(3,2)$ e il punto B di coordinate $(7,4)$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'asse s del segmento AB.

$4x + 2y - 26 = 0$

Motivazione:

Il punto medio di A e B è $M = (5,3)$. I coefficienti della x e della y di un'equazione cartesiana della retta s sono $(7-3, 4-2) = (4,2)$. E quindi un'equazione della retta s è $4(x-5) + 2(y-3) = 0$ o, equivalentemente, $4x + 2y - 26 = 0$.

2	

(b) Determinare l'area del trapezio $ABB'A'$ dove A' e B' sono le proiezioni ortogonali sull'asse delle ascisse dei punti A e B rispettivamente.

12

Motivazione:

Il punto A' ha coordinate $(3,0)$. Il punto B' ha coordinate $(7,0)$.
Il trapezio $ABB'A'$ ha area uguale alla somma delle aree dei triangoli ABA' e $A'BB'$.
L'area del triangolo ABA' è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, A')\,\mathrm{d}(A', B') = \frac{1}{2} 2 \cdot 4 = 4$.
L'area del triangolo $A'B'A$ è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(B, B')\,\mathrm{d}(A', B') = \frac{1}{2} 4 \cdot 4 = 8$.
E quindi l'area del trapezio è uguale a 12.

3	

(c) Determinare sull'asse delle ascisse tutti i punti C tali che l'area del triangolo ABC sia uguale a 6.

$C = (5,0)$ e $C' = (-7,0)$.

Motivazione:

L'area del triangolo ABC è $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A,B)\,\mathrm{d}(C,r)$ dove r è la retta passante per A e B.
Abbiamo $\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{20}$.
Svolgendo i calcoli otteniamo che $x - 2y + 1 = 0$ è un'equazione cartesiana della retta r.
Un punto C dell'asse delle ascisse ha come coordinate $(t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$.
La distanza di C dalla retta r è $\frac{|t+1|}{\sqrt{5}}$.
Imponendo che l'area del triangolo sia uguale a 6 otteniamo: $\frac{1}{2}\sqrt{20}\frac{|t+1|}{\sqrt{5}} = 6$ da cui $|t+1| = 6$ e quindi $t = -1 \pm 6$. Da cui segue che i punti cercati sono $C = (5,0)$ e $C' = (-7,0)$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati il punto A di coordinate $(2,-1,1)$, il punto B di coordinate $(0,1,2)$ e il punto C di coordinate $(-1,2,3)$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

$\pi : x + y - 1 = 0.$

Motivazione:

Il piano π ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-1 \\ 0-2 & 1-(-1) & 2-1 \\ -1-2 & 2-(-1) & 3-1 \end{vmatrix} = 0$ da cui $x + y - 1 = 0$.

2	

(b) Sia r la retta passante per A e B. Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per il punto A e ortogonale alla retta r.

$\alpha : -2x + 2y + z + 5 = 0$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(0-2, 1-(-1), 2-1) = (-2, 2, 1)$. Quindi il piano α ha equazione cartesiana $-2(x-2) + 2(y+1) + z - 1 = 0$ da cui $-2x + 2y + z + 5 = 0$.

3	

(c) Determinare le coordinate del centro della circonferenza passante per A, B e C.

$(3, -2, \frac{19}{2})$

Motivazione:

Il centro K della circonferenza appartiene al piano π. Inoltre, essendo equidistante dai punti A, B e C, appartiene ai piani β, γ, δ che sono i piani assi dei segmenti AB, AC e BC rispettivamente.
Sappiamo che $\beta \cap \gamma$ è contenuto in δ e quindi $K = \pi \cap \beta \cap \gamma \cap \delta = \pi \cap \beta \cap \gamma$.
Determiniamo il piano β asse del segmento AB.
Il piano β è parallelo al piano α determinato nella risposta (b) e passa per il punto medio M dei punti A e B. Il punto M ha coordinate $(1, 0, \frac{3}{2})$. E quindi $\beta : -2(x-1) + 2y + (z - \frac{3}{2}) = 0$ da cui $\beta : -4x + 4y + 2z + 1 = 0$.
Determiniamo ora il piano γ asse del segmento AC.
La retta passante per A e C ha parametri direttori $(-3, 3, 2)$ e il punto medio di A e C ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$. E quindi $\gamma = -3(x - \frac{1}{2}), +3(y - \frac{1}{2}) + 2(z-2) = 0$. Da cui $\gamma : -3x + 3y + 2z - 4 = 0$.
Il sistema dato dalle equazioni dei tre piani π, β, γ ha come soluzione $(3, -2, \frac{19}{2})$. Queste sono le coordinate di K.