COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $\mathbb{R}^4[x]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore di 4.
Si consideri l'insieme $A = \{\mathbf{v}_1 = 1+x, \mathbf{v}_2 = 1+x^2, \mathbf{v}_3 = 1+x^3\}$. Dimostrare che è vera o mostrare che è falsa con un controesempio ognuna delle seguenti affermazioni:

2 (a) Comunque sia fissato un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4[x]$, l'insieme $B = A \cup \{\mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4[x]$.

Falso.

Motivazione:

Falso. Controesempio. Se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ allora l'insieme B, avendo due vettori uguali non è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

2 (b) Comunque sia fissato un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4[x]$, l'insieme $C = A - \{\mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4[x]$.

Vero.

Motivazione:

I vettori di A sono linearmente indipendenti. Infatti la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate dei vettori di A relativamente alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ ha chiaramente rango uguale a 3. E quindi i tre vettori di A sono linearmente indipendenti.
Distinguiamo ora due casi. Primo caso: $\mathbf{v} \notin A$. In questo caso $C = A$ e quindi i suoi vettori sono linearmente indipendenti. Secondo caso: $\mathbf{v} \in A$. Per fissare le idee sia $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. E quindi $C = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. I due vettori di C sono linearmente indipendenti.
Nel caso in cui $\mathbf{v}$ sia uno degli altri due vettori di A la dimostrazione è analoga.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1,0,0,0)$, il punto B di coordinate $(0,\frac{1}{2},0,0)$, il punto C di coordinate $(0,0,\frac{1}{3},0)$ e il punto D di coordinate $(0,0,0,\frac{1}{4})$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ passante per i punti A, B, C e D.

$\Sigma : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 1 = 0$

Motivazione:

Consideriamo un'equazione generica di un iperpiano: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0$.

Imponendo il passaggio per i quattro punti otteniamo il sistema: $\begin{cases} a_1 + b &= 0 \\ \frac{1}{2}a_2 + b &= 0 \\ \frac{1}{3}a_3 + b &= 0 \\ \frac{1}{4}a_4 + b &= 0 \end{cases}$

le cui soluzioni sono ovviamente $\{a_1 = h, a_2 = 2h, a_3 = 3h, a_4 = 4h, b = -h \mid \ h \in R\}$. Ponendo $h = 1$, otteniamo un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ.

2	

(b) Determinare delle equazioni parametriche della retta passante per il punto E di coordinate $(4,3,2,1)$ perpendicolare a Σ.

$$\begin{cases} x_1 = 4 + t \\ x_2 = 3 + 2t \\ x_3 = 2 + 3t \\ x_4 = 1 + 4t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Motivazione:

La retta cercata ha parametri direttori uguali ai coefficienti dell'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ.

Imponendo il passaggio per il punto E otteniamo: $\begin{cases} x_1 = 4 + t \\ x_2 = 3 + 2t \\ x_3 = 2 + 3t \\ x_4 = 1 + 4t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e sia f l'endomorfismo di V associato, relativamente alla base data, alla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3	

(a) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$
-1	$\{\mathbf{v}_2\}$
-2	$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A ha come radici 0 , -1 e -2.
Per trovare una base di $E(\lambda)$, dove λ è un autovalore di f, risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - \lambda \cdot I$.
Per l'autovalore 0 otteniamo le soluzioni $(h, 0, -h)$ con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$ e quindi è $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$.
Per l'autovalore -1 otteniamo le soluzioni $(0, h, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(-1)$ si ottiene ponendo $h = 1$ e quindi è $\{\mathbf{v}_2\}$.
Per l'autovalore -2 otteniamo le soluzioni $(h, 0, h)$ con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(-2)$ si ottiene ponendo $h = 1$ e quindi è $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$.

2	

(b) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Nella risposta precedente per ogni autospazio abbiamo determinato una base formata da un vettore. Per determinare una base ortonormale in ogni autospazio sostituiamo il vettore della base con il vettore diviso per la sua norma.

2	

(c) Determinare , se esistono, una matrice diagonale $D' \neq D$ e una matrice ortogonale N tali che $D' = N^{-1}AN$.

$$D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per determinare D' scambiamo tra loro il primo e il terzo autovalore.
Per determinare N di conseguenza scambiamo tra loro il primo e il terzo autovettore.

4. Si consideri il sottospazio vettoriale V di $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da: $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0 \right\}$.

2	

(a) Determinare una base di V.

$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Motivazione:

Le soluzioni dell' equazione $a+b+c+d=0$ sono $\{(a=-t_1-t_2-t_3, b=t_1, c=t_2, d=t_3) \mid t_i \in \mathbb{R}\}$. E quindi ponendo prima $t_1=1, t_2=0, t_3=0$, poi $t_1=0, t_2=1, t_3=0$ e infine $t_1=0, t_2=0, t_3=1$, si ottengono le tre matrici $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, che formano una base di V.

2	

(b) Determinare una base di $V \cap S(2,\mathbb{R})$, dove $S(2,\mathbb{R})$ è il sottospazio delle matrici simmetriche di $M(2,2,\mathbb{R})$:

$\left\{ B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Motivazione:

Si ha $S(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b=c \right\}$.
E quindi $V \cap S(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=b-c=0 \right\}$.
Le soluzioni del sistema $\begin{cases} a+b+c+d &= 0 \\ b-c &= 0 \end{cases}$ sono $\{(a=-2t_1-t_2, b=t_1, c=t_1, d=t_2) \mid t_i \in \mathbb{R}\}$. E quindi ponendo prima $t_1=1, t_2=0$ e poi $t_1=0, t_2=1$, si ottengono le matrici $B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, che formano una base di $V \cap S(2,\mathbb{R})$.

3	

(c) Determinare una base di $V + S(2,\mathbb{R})$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Motivazione:

Applicando la formula di Grassmann si ha $\dim(V + S(2,\mathbb{R})) = \dim V + \dim S(2,\mathbb{R}) - \dim(V \cap S(2,\mathbb{R})) = 3+3-2 = 4$, e quindi $V + S(2,R) = M(2,2,\mathbb{R})$. Possiamo allora prendere come base di $V + S(2,\mathbb{R})$ la base canonica di $M(2,2,\mathbb{R})$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(0,-3)$, il punto B di coordinate $(4,3)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -3-2t \\ y = 3+t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

| 2 | |

(a) Determinare le coordinate del punto Q del segmento AB tale che la lunghezza del segmento AB sia uguale a 4 volte la lunghezza del segmento AQ.

$Q = (1, -\frac{3}{2})$

Motivazione:

Un'equazione vettoriale del segmento AB è
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ con $0 \leq t \leq 1$.
Viste le condizioni richieste, si deve avere
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$
e quindi $Q = (1, -\frac{3}{2})$.

| 2 | |

(b) Determinare un'equazione cartesiana del fascio di rette parallele all'asse del segmento AB.

$4x + 6y + h = 0$ con $h \in \mathbb{R}$

Motivazione:

Sappiamo che, data una retta di equazione $ax+by+c=0$, il vettore $\mathbf{w} = (a,b)$ è ortogonale alla retta. Una generica retta parallela all'asse del segmento AB ha equazione cartesiana del tipo $4x+6y+h=0$ con $h \in \mathbb{R}$, dal momento che il vettore $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,6)$ è un vettore direttore della retta passante per A e B.

| 3 | |

(c) Determinare sulla retta r tutti i punti C tali che il triangolo ABC sia rettangolo in C.

$C_1 = (-1,2)$ e $C_2 = (\frac{27}{5}, -\frac{6}{5})$.

Motivazione:

Il punto P generico della retta r ha coordinate $(-3-2t, 3+t)$.
Dobbiamo scegliere tra questi punti, i punti C tali che le rette AC e BC abbiano rispettivamente vettori direttori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ che siano ortogonali tra loro.
Si ha $\mathbf{v}_1 = (-3-2t, 3+t-(-3)) = (-3-2t, 6+t)$ e $\mathbf{v}_2 = (-3-2t-4, 3+t-3) = (-2t-7, t)$.
Imponiamo che il prodotto scalare di questi vettori sia nullo: $(-3-2t)(-2t-7)+(6+t)t = 0$.
Sviluppando si ottiene $5t^2+26t+21 = 0$, da cui, risolvendo, $t_1 = -1$ e $t_2 = -\frac{21}{5}$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di r si ha $C_1 = (-1,2)$ e $C_2 = (\frac{27}{5}, -\frac{6}{5})$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati il punto A di coordinate $(-1, 1, 2)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per il punto A.

$\pi : 2x + y + 3z - 5 = 0.$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si vede che la retta r ha equazioni cartesiane $\begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$.
Il fascio dei piani passanti per r ha quindi equazione $a(y + z - 1) + b(-x + y + 1) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto A otteniamo $a(1 + 2 - 1) + b(-(-1) + 1 + 1) = 0$. Da cui $2a + 3b = 0$. Ponendo $a = 3$ e $b = -2$, si ha l'equazione richiesta: $2x + y + 3z - 5 = 0$.

2	

(b) Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.

$H = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ è ortogonale al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$. Un generico piano ortogonale alla retta r ha quindi equazione $-x-y+z+d = 0$. Imponendo il passaggio per A otteniamo $-(-1) - 1 + 2 + d = 0$. da cui $d = -2$. E quindi un'equazione del piano ortogonale alla retta r e passante per il punto A è: $-x - y + z - 2 = 0$. Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema formato da quest'ultima equazione e dalle equazioni della retta r. Abbiamo quindi il sistema $\begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \\ -x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$.
Risolvendo il sistema si hanno le coordinate di H: $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$

3	

(c) Determinare un'equazione cartesiana del piano α contenente la retta r e parallelo al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$.

$-2x + 3y + z + 1 = 0$

Motivazione:

Il piano α deve passare per un punto di r, ad esempio $K = (2, 1, 0)$, ed è generato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} = (-1, -1, 1)$, dove $\mathbf{w}$ è un vettore direttore della retta r. Il piano α ha quindi equazione $\det \begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.
L'equazione del piano α è: $-2x + 3y + z + 1 = 0$.