COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ due vettori linearmente indipendenti di V.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di f entrambi con autovalore uguale a 3, allora il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è autovettore di f con autovalore 3+3=6.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e sia $f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_2$. Si ha allora $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.
Il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è quindi autovettore con autovalore 3 e non 6.

2 (b) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di f il primo con autovalore uguale a 3 e il secondo con autovalore uguale a 4, allora il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è autovettore di f.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e sia $f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_2$. Si ha allora $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$. E quindi il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ non è autovettore di f.

2. In $\mathbb{R}^5$ siano dati i punti $P_0 := (1,0,0,1,0)$, $P_1 := (0,0,0,0,1)$, $P_2 = (1,0,1,0,0)$ e $P_3 := (k,k,k,k,k)$.

2	

(a) Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati.

Dimostrazione:

Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati equivale a dimostrare che il sottospazio affine Σ contenente i punti P_0, P_1, P_2 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0$.

Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A ha rango uguale a 2 poiché il suo minore formato dalla prima e dalla terza riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 2$. Pertanto Σ è un piano e non una retta.

2	

(b) Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2.

Nessun valore di k.

Motivazione:

Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2 equivale a determinare i valori di k per i quali il sottospazio affine Σ' contenente i punti P_0, P_1, P_2, P_3 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ' è uguale al rango della matrice B avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$.

Abbiamo: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ -1 & -1 & k-1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B è ottenuta dalla matrice A aggiungendo una colonna, abbiamo $\operatorname{rk} B \geq \operatorname{rk} A = 2$. Consideriamo il minore della matrice B formato dalle prime tre righe. Il suo determinante è uguale a k e quindi per $k \neq 0$ il rango di B è uguale a 3.

Vediamo ora cosa succede per $k = 0$. La matrice B diventa:

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Osserviamo che il minore di B formato dalla prima, terza e quarta riga ha determinante non nullo e quindi anche in questo caso $\operatorname{rk} B = 3$. Ne segue che non esiste alcun valore di k per il quale il punto P_3 appartenga al piano passante per P_0, P_1, P_2.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di R^4 definito da $f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_4)$.

| 1 | |

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo $f[(1, 0, 0, 0)] = (1, 1, 1, 1)$. Le coordinate di questo vettore formano la prima colonna della matrice A.
Analogamente per le altre colonne.

| 2 | |

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$

Motivazione:

La matrice A ha le prime due colonne uguali e quindi $\operatorname{rk} A \leq 3$. Inoltre il minore di A ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna è invertibile, quindi $\operatorname{rk} A = 3 = \dim f(\mathbb{R}^4)$.
Dalla formula $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^4)$ segue $\dim \ker f = 1$.
Dal momento che le prime due colonne di A sono uguali segue che $f[(1, -1, 0, 0)] = 0$ e quindi $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$ è una base di $\ker f$.

| 4 | |

(c) Verificare se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia formata da autovettori.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 1, 2, 2)\}$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si ottiene $\det(A - xI) = (1 - x)^2((1 - x)^2 - 1) = (1 - x)^2(-x)(2 - x)$.
E quindi gli autovalori di f sono 1 (con molteplicità 2), 0 (con molteplicità 1) e 2 (con molteplicità 1).
Osservando la matrice A si nota subito che i vettori $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono autovettori linearmente indipendenti con autovalore 1 e quindi $\dim E(1) = 2$. Dal momento che si ha $\dim E(0) = \dim E(2) = 1$ l'endomorfismo è diagonalizzabile.
Per trovare una base di autovettori cerchiamo una base per ogni autospazio. Abbiamo già determinato una base di $E(0) = \ker f$ e una base di $E(1)$. Ci rimane da determinare una base di $E(2)$. Svolgendo i calcoli si trova che il vettore $(1, 1, 2, 2)$ forma una base di $E(2)$.
I quattro vettori così trovati formano una base di autovettori.

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

2	

(a) Determinare una base di V.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -2, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1, 0)\}$

Motivazione:

Sottraendo alla prima equazione la seconda otteniamo $x_5 = 0$. Dalla seconda equazione otteniamo $x_4 = -x_1 - 2x_2 - x_3$.
E quindi $V = \{(t_1, t_2, t_3, -t_1 - 2t_2 - t_3, 0) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}, t_3 \in \mathbb{R}\}$.
Ponendo $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$, poi $t_2 = 1, t_1 = t_3 = 0$ e infine $t_3 = 1, t_1 = t_2 = 0$ otteniamo la seguente base di V:
$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -2, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1, 0)\}$.

2	

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W tale che $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$.

$\{\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Prolunghiamo la base V con due vettori $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$ in modo tale da ottenere una base di $\mathbb{R}^5$. Ponendo $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ otteniamo quel che vogliamo perché la matrice avente come colonne le coordinate di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha determinante diverso da 0.

3	

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale V' tale che $\dim V' = 3$ e $V + V' = \mathbb{R}^5$.

$\{\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassman segue che $\dim(V \cap V') = 1$ e quindi, per formare una base di V', prendiamo il vettore $\mathbf{v}_3 \in V$ e i vettori $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ che formano una base di W.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo T avente come vertici i punti $A := (3, 4 + \sqrt{21})$, $B := (-3, 1)$ e $C := (5, 7)$.

2	

(a) Verificare se il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Motivazione:

Un vettore parallelo al lato AB del triangolo è $\mathbf{v} = (-3-3, 1-4-\sqrt{21}) = (-6, -3-\sqrt{21})$.
Un vettore parallelo al lato AC del triangolo è $\mathbf{w} = (5-3, 7-4-\sqrt{21}) = (2, 3-\sqrt{21})$.
Dal momento che $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = 0$, il triangolo T è retto nel vertice A.

3	

(b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo T.

$(x-1)^2+(y-4)^2-25=0$

Motivazione:

L'angolo $\widehat{BAC}$ è retto e quindi insiste sul diametro BC della circonferenza cercata. Segue che il centro della circonferenza cercata è il punto medio M del lato BC.
Quindi $M = (\frac{5-3}{2}, \frac{7+1}{2}) = (1, 4)$.
Il raggio della circonferenza è uguale a $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(B, C) = \frac{1}{2}\sqrt{(5-(-3))^2 + (7-1)^2} = \sqrt{25}$.
E quindi un'equazione cartesiana della circonferenza è $(x-1)^2 + (y-4)^2 - 25 = 0$.

2	

(c) Determinare le coordinate di un quarto punto A' tale che il quadrilatero formato dai punti A, B, A', C, presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

$A' = (-1, 4-\sqrt{21})$.

Motivazione:

Il punto A' è il simmetrico del punto A rispetto al punto medio $M = (1, 4)$ del segmento BC.
L'ascissa del punto A' è uguale a $2\cdot 1-3 = -1$ e l'ordinata è uguale a $2\cdot 4-(4+\sqrt{21}) = 4-\sqrt{21}$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti $A := (1, 2, -2)$, $B := (3, -4, 2)$ e il vettore $\mathbf{v} := (1, -1, 1)$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore $\mathbf{v}$ sia alla retta r passante per i punti A e B.

$x - y - 2z = 0$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{w} = (3-1, -4-2, 2-(-2)) = (2, -6, 4)$ è parallelo alla retta r. Il piano π cercato è quindi parallelo ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Dal momento che il piano π passa per l'origine, una sua equazione cartesiana è
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la prima riga si ha $2x-2y-4z = 0$, da cui $x-y-2z = 0$.

2	

(b) Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale di B sul piano $\sigma : x - 2y + 2z = 0$.

$H = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

Motivazione:

Il punto H è l'intersezione tra il piano σ e la retta r' passante per il punto B e ortogonale al piano σ.
Un vettore ortogonale a σ è $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$, da cui deriviamo le equazioni parametriche della retta r' : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Sostituendo tali valori nell'equazione del piano σ si ha $(3 + t) - 2(-4 - 2t) + 2(2 + 2t) = 0$, da cui $t = -\frac{5}{3}$ e le coordinate del punto cercato: $H = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$.

3	

(c) Determinare se la retta s di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ e i punti A e B sono complanari o meno.

La retta s e punti A e B non sono complanari.

Motivazione:

Ponendo prima $t = 0$ e poi $t = 1$ nelle equazioni parametriche della retta s otteniamo i punti $P_0 = (1, 2, 0)$ e $P_1 = (2, 1, 3)$ della retta s.
Sappiamo che, se due punti distinti di una retta appartengono ad un piano, allora la retta appartiene al piano. E quindi, per verificare la complanarità della retta s con i punti A e B, è sufficiente verificare se i punti $P_0, P_1, P_2 = A, P_3 = B$ sono complanari. Applicando la condizione di complanarità di quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$. Svolgendo i calcoli si verifica che la relazione è falsa. La retta s e i punti A e B non sono quindi complanari.

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale E. Siano $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ due vettori linearmente indipendenti di E.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2	

(a) Se $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono autovettori di f entrambi con autovalore uguale a 5, allora il vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ è autovettore di f con autovalore 5+5=10.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e sia $f(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1$ e $f(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_2$. Si ha allora $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 = 5(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.
Il vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ è quindi autovettore con autovalore 5 e non 10.

2	

(b) Se $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono autovettori di f il primo con autovalore uguale a 5 e il secondo con autovalore uguale a 7, allora il vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ è autovettore di f.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e sia $f(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1$ e $f(\mathbf{e}_2) = 7\mathbf{e}_2$. Si ha allora $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. E quindi il vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ non è autovettore di f.

2. In $\mathbb{R}^5$ siano dati i punti $P_0 := (1,0,1,0,0)$, $P_1 := (0,0,0,0,1)$, $P_2 = (1,0,0,1,0)$ e $P_3 := (k,k,k,k,k)$.

2	

(a) Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati.

Dimostrazione:

Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati equivale a dimostrare che il sottospazio affine Σ contenente i punti P_0, P_1, P_2 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0$.

Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A ha rango uguale a 2 poiché il suo minore formato dalla prima riga e dalla quarta riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 2$. Pertanto Σ è un piano e non una retta.

2	

(b) Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2.

Nessun valore di k.

Motivazione:

Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2 equivale a determinare i valori di k per i quali il sottospazio affine Σ' contenente i punti P_0, P_1, P_2, P_3 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ' è uguale al rango della matrice B avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$.

Abbiamo: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & k \\ -1 & -1 & k-1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B è ottenuta dalla matrice A aggiungendo una colonna, abbiamo $\operatorname{rk} B \geq \operatorname{rk} A = 2$. Consideriamo il minore della matrice B formato dalle prime tre righe. Il suo determinante è uguale a $-k$ e quindi per $k \neq 0$ il rango di B è uguale a 3.

Vediamo ora cosa succede per $k = 0$. La matrice B diventa:

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Osserviamo che il minore di B formato dalla prima, quarta e quinta riga ha determinante non nullo e quindi anche in questo caso $\operatorname{rk} B = 3$. Ne segue che non esiste alcun valore di k per il quale il punto P_3 appartenga al piano passante per P_0, P_1, P_2.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di R^4 definito da:
$f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + 3x_4)$.

1

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo $f[(1,0,0,0)] = (1,1,1,1)$. Le coordinate di questo vettore formano la prima colonna della matrice A.
Analogamente per le altre colonne.

2

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$

Motivazione:

La matrice A ha le prime due colonne uguali e quindi $\operatorname{rk} A \leq 3$. Inoltre il minore di A ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna è invertibile, quindi $\operatorname{rk} A = 3 = \dim f(\mathbb{R}^4)$.
Dalla formula $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^4)$ segue $\dim \ker f = 1$.
Dal momento che le prime due colonne di A sono uguali segue che $f[(1, -1, 0, 0)] = 0$ e quindi $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$ è una base di $\ker f$.

4

(c) Verificare se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia formata da autovettori.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 1, -2, -2)\}$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si ottiene $\det(A - xI) = (3 - x)^2((1 - x)^2 - 1) = (3 - x)^2(-x)(2 - x)$.
E quindi gli autovalori di f sono 3 (con molteplicità 2), 0 (con molteplicità 1) e 2 con molteplicità 1.
Osservando la matrice A si nota subito che i vettori $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono autovettori linearmente indipendenti con autovalore 3 e quindi $\dim E(3) = 2$. Dal momento che si ha $\dim E(0) = \dim(E(2) = 1$ l'endomorfismo è diagonalizzabile.
Per trovare una base di autovettori cerchiamo una base per ogni autospazio. Abbiamo già determinato una base di $E(0) = \ker f$ e una base di $E(3)$. Ci rimane da determinare una base di $E(2)$. Svolgendo i calcoli si trova che il vettore $(1, 1, -2, -2)$ forma una base di $E(2)$.
I quattro vettori così trovati formano una base di autovettori.

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases} \right\}$$

2	

(a) Determinare una base di V.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -3, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1, 0)\}$

Motivazione:

Sottraendo alla prima equazione la seconda otteniamo $x_5 = 0$. Dalla seconda equazione otteniamo $x_4 = -3x_1 - x_2 - x_3$.
E quindi $V = \{(t_1, t_2, t_3, -3t_1 - t_2 - t_3, 0) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}, t_3 \in \mathbb{R}, \}$.
Ponendo $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$, poi $t_2 = 1, t_1 = t_3 = 0$ e infine $t_3 = 1, t_1 = t_2 = 0$ otteniamo la seguente base di V:
$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -3, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1, 0)\}$.

2	

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W tale che $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$.

$\{\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Prolunghiamo la base V con due vettori $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$ in modo tale da ottenere una base di $\mathbb{R}^5$. Ponendo $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ otteniamo quel che vogliamo perché la matrice avente come colonne le coordinate di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha determinante diverso da 0.

3	

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale V' tale che $\dim V' = 3$ e $V + V' = \mathbb{R}^5$.

$\{\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassman segue che $\dim(V \cap V') = 1$ e quindi, per formare una base di V', prendiamo il vettore $\mathbf{v}_3 \in V$ e i vettori $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ che formano una base di W.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo T avente come vertici i punti $A := (4+\sqrt{21}, 3)$, $B := (1, -3)$ e $C := (7, 5)$.

2	

(a) Verificare se il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Motivazione:

Un vettore parallelo al lato AB del triangolo è $\mathbf{v} = (1-4-\sqrt{21}, -3-3) = (-3-\sqrt{21}, -6)$.
Un vettore parallelo al lato AC del triangolo è $\mathbf{w} = (7-4-\sqrt{21}, 5-3) = (3-\sqrt{21}, 2)$.
Dal momento che $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = 0$, il triangolo T è retto nel vertice A.

3	

(b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo T.

$(x-4)^2+(y-1)^2-25=0$

Motivazione:

L'angolo $\widehat{BAC}$ è retto e quindi insiste sul diametro BC della circonferenza cercata. Segue che il centro della circonferenza cercata è il punto medio M del lato BC.
Quindi $M = (\frac{7+1}{2}, \frac{5-3}{2}) = (4, 1)$.
Il raggio della circonferenza è uguale a $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(B, C) = \frac{1}{2}\sqrt{(7-1)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{25}$.
E quindi un'equazione cartesiana della circonferenza è $(x-4)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0$.

2	

(c) Determinare le coordinate di un quarto punto A' tale che il quadrilatero formato dai punti A, B, A', C, presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

$A' = (4-\sqrt{21}, -1)$.

Motivazione:

Il punto A' è il simmetrico del punto A rispetto al punto medio $M = (4, 1)$ del segmento BC.L'ascissa del punto A' è uguale a $2 \cdot 4 - (4+\sqrt{21}) = 4-\sqrt{21}$ e l'ordinata è uguale a $2 \cdot 1 - 3 = -1$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti $A := (-2, 2, 1)$, $B := (2, -4, 3)$ e il vettore $\mathbf{v} := (1, -1, 1)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore $\mathbf{v}$ sia alla retta r passante per i punti A e B.

$2x + y - z = 0$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{w} = (2-(-2), -4-2, 3-1) = (4, -6, 2)$ è parallelo alla retta r. Il piano π cercato è quindi parallelo ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Dal momento che il piano π passa per l'origine, una sua equazione cartesiana è
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la prima riga si ha $4x+2y-2z = 0$, da cui $2x+y-z = 0$.

2

(b) Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale di B sul piano $\sigma : 2x - 2y + z = 0$.

$H = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

Motivazione:

Il punto H è l'intersezione tra il piano σ e la retta r' passante per il punto B e ortogonale al piano σ.
Un vettore ortogonale a σ è $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$, da cui deriviamo le equazioni parametriche della retta r' : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Sostituendo tali valori nell'equazione del piano σ si ha $2(2 + 2t) - 2(-4 - 2t) + (3 + t) = 0$, da cui $t = -\frac{5}{3}$ e le coordinate del punto cercato: $H = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

3

(c) Determinare se la retta s di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ e i punti A e B sono complanari o meno.

La retta s e punti A e B non sono complanari.

Motivazione:

Ponendo prima $t = 0$ e poi $t = 1$ nelle equazioni parametriche della retta s otteniamo i punti $P_0 = (0, 2, 1)$ e $P_1 = (3, 1, 2)$ della retta s.
Sappiamo che, se due punti distinti di una retta appartengono ad un piano, allora la retta appartiene al piano. E quindi, per verificare la complanarità della retta s con i punti A e B, è sufficiente verificare se i punti $P_0, P_1, P_2 = A, P_3 = B$ sono complanari. Applicando la condizione di complanarità di quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$. Svolgendo i calcoli si verifica che la relazione è falsa. La retta s e i punti A e B non sono quindi complanari.

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori linearmente indipendenti di V.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di f entrambi con autovalore uguale a 4, allora il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è autovettore di f con autovalore 4+4=8.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e sia $f(\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{w}) = 4\mathbf{w}$. Si ha allora $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = 4\mathbf{v} + 4\mathbf{w} = 4(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
Il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è quindi autovettore con autovalore 4 e non 8.

2 (b) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di f il primo con autovalore uguale a 4 e il secondo con autovalore uguale a 5, allora il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è autovettore di f.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e sia $f(\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{w}) = 5\mathbf{v}$. Si ha allora $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = 4\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$. E quindi il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ non è autovettore di f.

2. In $\mathbb{R}^5$ siano dati i punti $P_0 := (1,0,0,1,0)$, $P_1 := (0,0,0,0,1)$, $P_2 = (1,1,0,0,0)$ e $P_3 := (k,k,k,k,k)$.

2	

(a) Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati.

Dimostrazione:

Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati equivale a dimostrare che il sottospazio affine Σ contenente i punti P_0, P_1, P_2 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0$.

Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A ha rango uguale a 2 poiché il suo minore formato dalla prima riga e dalla seconda riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 2$. Pertanto Σ è un piano e non una retta.

2	

(b) Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2.

Nessun valore di k.

Motivazione:

Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2 equivale a determinare i valori di k per i quali il sottospazio affine Σ' contenente i punti P_0, P_1, P_2, P_3 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ' è uguale al rango della matrice B avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$.

Abbiamo: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k \\ -1 & -1 & k-1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B è ottenuta dalla matrice A aggiungendo una colonna, abbiamo $\operatorname{rk} B \geq \operatorname{rk} A = 2$. Consideriamo il minore della matrice B formato dalle prime tre righe. Il suo determinante è uguale a $-k$ e quindi per $k \neq 0$ il rango di B è uguale a 3.

Vediamo ora cosa succede per $k = 0$. La matrice B diventa:

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Osserviamo che il minore di B formato dalla prima, seconda e quinta riga ha determinante non nullo e quindi anche in questo caso $\operatorname{rk} B = 3$. Ne segue che non esiste alcun valore di k per il quale il punto P_3 appartenga al piano passante per P_0, P_1, P_2.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f l'endomorfismo di R^4 definito da:
$f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 4x_3, x_1 + x_2 + 4x_4)$.

| 1 | |

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo $f[(1, 0, 0, 0)] = (1, 1, 1, 1)$. Le coordinate di questo vettore formano la prima colonna della matrice A.
Analogamente per le altre colonne.

| 2 | |

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$

Motivazione:

La matrice A ha le prime due colonne uguali e quindi $\operatorname{rk} A \leq 3$. Inoltre il minore di A ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna è invertibile, quindi $\operatorname{rk} A = 3 = \dim f(\mathbb{R}^4)$.
Dalla formula $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^4)$ segue $\dim \ker f = 1$.
Dal momento che le prime due colonne di A sono uguali segue che $f[(1, -1, 0, 0)] = 0$ e quindi $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$ è una base di $\ker f$.

| 4 | |

(c) Verificare se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia formata da autovettori.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 1, -1, -1)\}$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si ottiene $\det(A - xI) = (4 - x)^2((1 - x)^2 - 1) = (4 - x)^2(-x)(2 - x)$.
E quindi gli autovalori di f sono 4 (con molteplicità 2), 0 (con molteplicità 1) e 2 con molteplicità 1.
Osservando la matrice A si nota subito che i vettori $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono autovettori linearmente indipendenti con autovalore 4 e quindi $\dim E(4) = 2$. Dal momento che si ha $\dim E(0) = \dim(E(2) = 1$ l'endomorfismo è diagonalizzabile.
Per trovare una base di autovettori cerchiamo una base per ogni autospazio. Abbiamo già determinato una base di $E(0) = \ker f$ e una base di $E(4)$. Ci rimane da determinare una base di $E(2)$. Svolgendo i calcoli si trova che il vettore $(1, 1, -1, -1)$ forma una base di $E(2)$.
I quattro vettori così trovati formano una base di autovettori.

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \right.$$

2

(a) Determinare una base di V.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -2, 0)\}$

Motivazione:

Sottraendo alla prima equazione la seconda otteniamo $x_5 = 0$. Dalla seconda equazione otteniamo $x_4 = -x_1 - x_2 - 2x_3$. E quindi $V = \{(t_1, t_2, t_3, -t_1 - t_2 - 2t_3, 0) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}, t_3 \in \mathbb{R}, \}$. Ponendo $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$, poi $t_2 = 1, t_1 = t_3 = 0$ e infine $t_3 = 1, t_1 = t_2 = 0$ otteniamo la seguente base di V:
$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -2, 0)\}$.

2

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W tale che $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$.

$\{\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Prolunghiamo la base V con due vettori $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$ in modo tale da ottenere una base di $\mathbb{R}^5$. Ponendo $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ otteniamo quel che vogliamo perché la matrice avente come colonne le coordinate di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha determinante diverso da 0.

3

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale V' tale che $\dim V' = 3$ e $V + V' = \mathbb{R}^5$.

$\{\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -2, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassman segue che $\dim(V \cap V') = 1$ e quindi, per formare una base di V', prendiamo il vettore $\mathbf{v}_3 \in V$ e i vettori $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ che formano una base di W.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo T avente come vertici i punti $A := (2, 4+\sqrt{21})$, $B := (-4, 1)$ e $C := (4, 7)$.

2	

(a) Verificare se il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Motivazione:

Un vettore parallelo al lato AB del triangolo è $\mathbf{v} = (-4-2, 1-4-\sqrt{21}) = (-6, -3-\sqrt{21})$.
Un vettore parallelo al lato AC del triangolo è $\mathbf{w} = (4-2, 7-4-\sqrt{21}) = (2, 3-\sqrt{21})$.
Dal momento che $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = 0$, il triangolo T è retto nel vertice A.

3	

(b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo T.

$x^2 + (y-4)^2 - 25 = 0$

Motivazione:

L'angolo $\widehat{BAC}$ è retto e quindi insiste sul diametro BC della circonferenza cercata. Segue che il centro della circonferenza cercata è il punto medio M del lato BC.
Quindi $M = (\frac{4-4}{2}, \frac{7+1}{2}) = (0, 4)$.
Il raggio della circonferenza è uguale a $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(B, C) = \frac{1}{2}\sqrt{(4-(-4))^2 + (7-1)^2} = \sqrt{25}$.
E quindi un'equazione cartesiana della circonferenza è $x^2 + (y-4)^2 - 25 = 0$.

2	

(c) Determinare le coordinate di un quarto punto A' tale che il quadrilatero formato dai punti A, B, A', C, presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

$A' = (-2, 4-\sqrt{21})$.

Motivazione:

Il punto A' è il simmetrico del punto A rispetto al punto medio $M = (0, 4)$ del segmento BC.
L'ascissa del punto A' è uguale a $2 \cdot 0 - 2 = -2$ e l'ordinata è uguale a $2 \cdot 4 - (4+\sqrt{21}) = 4 - \sqrt{21}$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti $A := (2, 1, -2)$, $B := (-4, 3, 2)$ e il vettore $\mathbf{v} := (-1, 1, 1)$.

| 2 | |

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore $\mathbf{v}$ sia alla retta r passante per i punti A e B.

$x - y + 2z = 0$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{w} = (-4-2, 3-1, 2-(-2)) = (-6, 2, 4)$ è parallelo alla retta r. Il piano π cercato è quindi parallelo ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Dal momento che il piano π passa per l'origine, una sua equazione cartesiana è
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la prima riga si ha $2x-2y+4z = 0$, da cui $x-y+2z = 0$.

| 2 | |

(b) Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale di B sul piano $\sigma : 2x - y - 2z = 0$.

$H = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$

Motivazione:

Il punto H è l'intersezione tra il piano σ e la retta r' passante per il punto B e ortogonale al piano σ.
Un vettore ortogonale a σ è $\mathbf{u} = (2, -1, -2)$, da cui deriviamo le equazioni parametriche della retta r' : $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$. Sostituendo tali valori nell'equazione del piano σ si ha $2(-4 + 2t) - (3 - t) - 2(2 - 2t) = 0$, da cui $t = \frac{5}{3}$ e le coordinate del punto cercato: $H = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

| 3 | |

(c) Determinare se la retta s di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$ e i punti A e B sono complanari o meno.

La retta s e punti A e B non sono complanari.

Motivazione:

Ponendo prima $t = 0$ e poi $t = 1$ nelle equazioni parametriche della retta s otteniamo i punti $P_0 = (2, 1, 0)$ e $P_1 = (1, 2, 3)$ della retta s.
Sappiamo che, se due punti distinti di una retta appartengono ad un piano, allora la retta appartiene al piano. E quindi, per verificare la complanarità della retta s con i punti A e B, è sufficiente verificare se i punti $P_0, P_1, P_2 = A, P_3 = B$ sono complanari. Applicando la condizione di complanarità di quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$. Svolgendo i calcoli si verifica che la relazione è falsa. La retta s e i punti A e B non sono quindi complanari.

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale E. Siano $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ due vettori linearmente indipendenti di E.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) Se $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ sono autovettori di f entrambi con autovalore uguale a 6, allora il vettore $\mathbf{e}+\mathbf{e}'$ è autovettore di f con autovalore 6+6=12.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ e sia $f(\mathbf{e}) = 6\mathbf{e}$ e $f(\mathbf{e}') = 6\mathbf{e}'$. Si ha allora $f(\mathbf{e}+\mathbf{e}') = f(\mathbf{e}) + f(\mathbf{e}') = 6\mathbf{e} + 6\mathbf{e}' = 6(\mathbf{e}+\mathbf{e}')$.
Il vettore $\mathbf{e}+\mathbf{e}'$ è quindi autovettore con autovalore 6 e non 12.

2 (b) Se $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ sono autovettori di f il primo con autovalore uguale a 6 e il secondo con autovalore uguale a 7, allora il vettore $\mathbf{e}+\mathbf{e}'$ è autovettore di f.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ e sia $f(\mathbf{e}) = 6\mathbf{e}$ e $f(\mathbf{e}') = 7\mathbf{e}'$. Si ha allora $f(\mathbf{e}+\mathbf{e}') = f(\mathbf{e}) + f(\mathbf{e}') = 6\mathbf{e} + 7\mathbf{e}'$. E quindi il vettore $\mathbf{e}+\mathbf{e}'$ non è autovettore di f.

2. In $\mathbb{R}^5$ siano dati i punti $P_0 := (1,0,0,0,1)$, $P_1 := (0,0,0,1,0)$, $P_2 = (1,0,1,0,0)$ e $P_3 := (k,k,k,k,k,k)$.

2	

(a) Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati.

Dimostrazione:

Dimostrare che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati equivale a dimostrare che il sottospazio affine Σ contenente i punti P_0, P_1, P_2 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0$.

Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A ha rango uguale a 2 poiché il suo minore formato dalla prima riga e dalla terza riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 2$. Pertanto Σ è un piano e non una retta.

2	

(b) Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2.

Nessun valore di k.

Motivazione:

Determinare i valori di k per i quali il punto P_3 appartiene al piano passante per P_0, P_1, P_2 equivale a determinare i valori di k per i quali il sottospazio affine Σ' contenente i punti P_0, P_1, P_2, P_3 ha dimensione uguale a 2. La dimensione di Σ' è uguale al rango della matrice B avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$.

Abbiamo: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & k \\ -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$.

Dal momento che la matrice B è ottenuta dalla matrice A aggiungendo una colonna, abbiamo $\operatorname{rk} B \geq \operatorname{rk} A = 2$. Consideriamo il minore della matrice B formato dalle prime tre righe. Il suo determinante è uguale a k e quindi per $k \neq 0$ il rango di B è uguale a 3.

Vediamo ora cosa succede per $k = 0$. La matrice B diventa:

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che il minore di B formato dalla prima, terza e quarta riga ha determinante non nullo e quindi anche in questo caso $\operatorname{rk} B = 3$. Ne segue che non esiste alcun valore di k per il quale il punto P_3 appartenga al piano passante per P_0, P_1, P_2.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di R^4 definito da:
$f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 5x_3, x_1 + x_2 + 5x_4)$.

| 1 | |

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo $f[(1, 0, 0, 0)] = (1, 1, 1, 1)$. Le coordinate di questo vettore formano la prima colonna della matrice A.
Analogamente per le altre colonne.

| 2 | |

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$

Motivazione:

La matrice A ha le prime due colonne uguali e quindi $\operatorname{rk} A \leq 3$. Inoltre il minore di A ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna è invertibile, quindi $\operatorname{rk} A = 3 = \dim f(\mathbb{R}^4)$.
Dalla formula $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^4)$ segue $\dim \ker f = 1$.
Dal momento che le prime due colonne di A sono uguali segue che $f[(1, -1, 0, 0)] = 0$ e quindi $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$ è una base di $\ker f$.

| 4 | |

(c) Verificare se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia formata da autovettori.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1), \mathbf{v}_4 = (3, 3, -2, -2)\}$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli si ottiene $\det(A - xI) = (5 - x)^2((1 - x)^2 - 1) = (5 - x)^2(-x)(2 - x)$.
E quindi gli autovalori di f sono 5 (con molteplicità 2), 0 (con molteplicità 1) e 2 con molteplicità 1.
Osservando la matrice A si nota subito che i vettori $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono autovettori linearmente indipendenti con autovalore 5 e quindi $\dim E(5) = 2$. Dal momento che si ha $\dim E(0) = \dim(E(2) = 1$ l'endomorfismo è diagonalizzabile.
Per trovare una base di autovettori cerchiamo una base per ogni autospazio. Abbiamo già determinato una base di $E(0) = \ker f$ e una base di $E(5)$. Ci rimane da determinare una base di $E(2)$. Svolgendo i calcoli si trova che il vettore $(3, 3, -2, -2)$ forma una base di $E(2)$.
I quattro vettori così trovati formano una base di autovettori.

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

2

(a) Determinare una base di V.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)\}$

Motivazione:

Sottraendo alla prima equazione la seconda otteniamo $x_5 = 0$. Dalla seconda equazione otteniamo $x_4 = -x_1 + 2x_2 + x_3$.
E quindi $V = \{(t_1, t_2, t_3, -t_1 + 2t_2 + t_3, 0) \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}, t_3 \in \mathbb{R}, \}$.
Ponendo $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$, poi $t_2 = 1, t_1 = t_3 = 0$ e infine $t_3 = 1, t_1 = t_2 = 0$ otteniamo la seguente base di V:
$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)\}$.

2

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W tale che $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$.

$\{\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Prolunghiamo la base V con due vettori $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$ in modo tale da ottenere una base di $\mathbb{R}^5$. Ponendo $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ otteniamo quel che vogliamo perché la matrice avente come colonne le coordinate di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha determinante diverso da 0.

3

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale V' tale che $\dim V' = 3$ e $V + V' = \mathbb{R}^5$.

$\{\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassman segue che $\dim(V \cap V') = 1$ e quindi, per formare una base di V', prendiamo il vettore $\mathbf{v}_3 \in V$ e i vettori $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ che formano una base di W.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo T avente come vertici i punti $A := (4+\sqrt{21}, 2)$, $B := (1, -4)$ e $C := (7, 4)$.

2	

(a) Verificare se il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Il triangolo T è rettangolo nel vertice A.

Motivazione:

Un vettore parallelo al lato AB del triangolo è $\mathbf{v} = (1-4-\sqrt{21}, -4-2) = (-3-\sqrt{21}, -6)$.
Un vettore parallelo al lato AC del triangolo è $\mathbf{w} = (7-4-\sqrt{21}, 4-2, = (3-\sqrt{21}, 2)$.
Dal momento che $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = 0$, il triangolo T è retto nel vertice A.

3	

(b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo T.

$(x-4)^2 + y^2 - 25 = 0$

Motivazione:

L'angolo $\widehat{BAC}$ è retto e quindi insiste sul diametro BC della circonferenza cercata. Segue che il centro della circonferenza cercata è il punto medio M del lato BC.
Quindi $M = (\frac{7+1}{2}, \frac{4-4}{2}) = (4, 0)$.
Il raggio della circonferenza è uguale a $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(B, C) = \frac{1}{2}\sqrt{(7-1)^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{25}$.
E quindi un'equazione cartesiana della circonferenza è $(x-4)^2 + y^2 - 25 = 0$.

2	

(c) Determinare le coordinate di un quarto punto A' tale che il quadrilatero formato dai punti A, B, A', C, presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

$A' = (4-\sqrt{21} - 2)$.

Motivazione:

Il punto A' è il simmetrico del punto A rispetto al punto medio $M = (4, 0)$ del segmento BC. L'ascissa del punto A' è uguale a $2 \cdot 4 - (4+\sqrt{21}) = 4 - \sqrt{21}$ e l'ordinata è uguale a $2 \cdot 0 - 2 = -2$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti $A := (1, -2, 2)$, $B := (3, 2, -4)$ e il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, -1)$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore $\mathbf{v}$ sia alla retta r passante per i punti A e B.

$x - 2y - z = 0$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{w} = (3-1, 2-(-2), -4-2) = (2, 4, -6)$ è parallelo alla retta r. Il piano π cercato è quindi parallelo ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Dal momento che il piano π passa per l'origine, una sua equazione cartesiana è

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando lungo la prima riga si ha $-2x + 4y + 2z = 0$, da cui $x - 2y - z = 0$.

2	

(b) Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale di B sul piano $\sigma : x + 2y - 2z = 0$.

$H = (\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

Motivazione:

Il punto H è l'intersezione tra il piano σ e la retta r' passante per il punto B e ortogonale al piano σ.
Un vettore ortogonale a σ è $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, da cui deriviamo le equazioni parametriche della retta r' : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$. Sostituendo tali valori nell'equazione del piano σ si ha $(3 + t) + 2(2 + 2t) - 2(-4 - 2t) = 0$, da cui $t = -\frac{5}{3}$ e le coordinate del punto cercato: $H = (\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

3	

(c) Determinare se la retta s di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ e i punti A e B sono complanari o meno.

La retta s e punti A e B non sono complanari.

Motivazione:

Ponendo prima $t = 0$ e poi $t = 1$ nelle equazioni parametriche della retta s otteniamo i punti $P_0 = (1, 0, 2)$ e $P_1 = (2, 3, 1)$ della retta s.
Sappiamo che, se due punti distinti di una retta appartengono ad un piano, allora la retta appartiene al piano. E quindi, per verificare la complanarità della retta s con i punti A e B, è sufficiente verificare se i punti $P_0, P_1, P_2 = A, P_3 = B$ sono complanari. Applicando la condizione di complanarità di quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$. Svolgendo i calcoli si verifica che la relazione è falsa. La retta s e i punti A e B non sono quindi complanari.