Questo documento riporta commenti, approfondimenti o metodi di soluzione alternativi per alcuni esercizi dell'esame. Ovviamente alcuni esercizi potevano essere risolti utilizzando metodi ancora diversi. I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 3(c) Una volta trovate le basi per nucleo e immagine di f si poteva determinare direttamente la loro intersezione senza utilizzare la formula di Grassman. Un vettore $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di f se è multiplo del vettore $(2,-1,1)$ cioè se è uguale a $\alpha(2,-1,1)$ per qualche α reale; d'altra parte $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f se è combinazione lineare di $(3,2,1)$ e $(1,3,0)$ cioè se esistono β e γ tali che $\mathbf{v} = \beta(3,2,1) + \gamma(1,3,0)$. Dunque si ha

$$\alpha(2,-1,1) = \beta(3,2,1) + \gamma(1,3,0),$$

vale a dire

$$(2\alpha, -\alpha, \alpha) = (3\beta + \gamma, 2\beta + 3\gamma, \beta)$$

che dà come condizione $\beta = \alpha$ e $\gamma = -\alpha$. Dunque i vettori dell'intersezione dipendono da un parametro α e sono tutti e soli i vettori del tipo $(2\alpha, -\alpha, \alpha)$ al variare di α in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4(b) Si noti che per rispondere a questa domanda non è necessario aver risposto alla domanda precedente: in particolare non è necessario calcolare gli autovalori di f utilizzando il polinomio caratteristico.

Esercizio 4(c) Vediamo per esteso come determinare le matrici D e M. La matrice D può essere ottenuta immediatamente: basta scrivere lungo la diagonale gli autovalori determinati al punto a, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Dunque

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si sarebbe potuto scegliere anche un diverso ordine per gli autovalori: in tal caso anche la matrice M dovrebbe essere modificata di conseguenza.

Poi occorre calcolare per ciascun autovalore una base ortonormale del relativo autospazio.

Cominciamo, ad esempio, a calcolare una base (non necessariamente ortonormale) dell'autospazio relativo a 2. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(0,t,t,u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E(2)$ è allora formata dai vettori $(0,1,1,0)$ e $(0,0,0,1)$. Dobbiamo ora ortonormalizzare questa base: fortunatamente questi due vettori formano già una base ortogonale di $E(2)$ (se non ce ne fossimo accorti o se avessimo trovato una base differente non sarebbe stato comunque difficile trovare una base ortogonale con la prima parte del processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt). Per ottenere una base ortonormale di $E(2)$ basta ora dividere ciascun vettore della base ortogonale per la propria norma, ottenendo così i vettori $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $(0,0,0,1)$. Poiché nella matrice D abbiamo posto l'autovalore 2 in terza e quarta posizione, scriviamo le componenti rispetto alla base canonica dei vettori così ottenuti lungo la terza e quarta colonna di M. Possiamo poi calcolare in maniera analoga una base ortonormale per gli altri autospazi (poiché entrambi gli altri autospazi hanno dimensione 1, una volta trovata una base per essi, basta dividere ciascun vettore per la propria norma).

È importante notare che il processo di ortonormalizzazione va applicato separatamente sulle basi di ciascun autospazio: se si considerasse una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A e si applicasse a questa base il processo di ortonormalizzazione si otterrebbe una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che potrebbe non essere formata da autovettori di A.

Esercizio 6(a) Date due rette r e s:

- nel caso siano parallele, tutti i piani contenenti r sono paralleli a s;
- nel caso non siano parallele, esiste un unico piano contenente r e parallelo a s.

In particolare si poteva senz'altro escludere la possibilità che non esistesse alcun piano contenente r e parallelo a s.

Esercizio 6(b) L'insieme dei piani ortogonali a s forma un fascio di piani paralleli. Dato un punto qualunque dello spazio esiste esattamente uno e un solo piano di questo fascio che lo contiene. In particolare dato un punto qualunque di r esiste un unico piano ortogonale a s che lo contiene: pertanto può esistere al massimo un piano ortogonale a s contenente tutta la retta r Si poteva senz'altro escludere quindi la possibilità che ci fossero infiniti piani contenenti r e ortogonali a s. Il piano in questione esiste se e solo se le rette r e s son ortogonali (si ricordi che nello spazio due rette ortogonali non sono necessariamente incidenti).

Esercizio 6(c) Si noti che si è potuto escludere il parallelismo tra le due rette sfruttando la soluzione della prima domanda. Se non ci si fosse accorti di ciò si potevano determinare i parametri direttori di r ricavandone le equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} x &= 1 \quad - 3t \\ y &= -2 - 2t. \\ z &= \qquad\;\; t \end{aligned}$$

Poiché i parametri direttori di r non sono proporzionali ai parametri direttori di s, le due rette non sono parallele.