Questo documento riporta commenti, approfondimenti o metodi di soluzione alternativi per alcuni esercizi dell'esame. Ovviamente alcuni esercizi potevano essere risolti utilizzando metodi ancora diversi. I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 3(a) Per rispondere a questa domanda non serve calcolare il polinomio caratteristico e determinare gli autovalori in funzione del parametro k.

Esercizio 3(b) Vediamo per esteso come determinare le matrici D e M. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico della matrice A_k (con $k = 1$):

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ 1 & -2-x & 1 \\ 1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} = -x^3 - 6x^2 - 9x = -x(x+3)^2.$$

Gli autovalori di A_k sono, quindi, 0 e -3.

Occorre calcolare per ciascun autovalore una base ortonormale del relativo autospazio.

Cominciamo con il calcolare una base (non necessariamente ortonormale) dell'autospazio relativo a -3. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -2-(-3) & 1 & 1 \\ 1 & -2-(-3) & 1 \\ 1 & 1 & -2-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(-t-u, t, u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E(-3)$ è allora formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 := (-1, 0, 1)$. Applichiamo ora il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &:= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &:= \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

Calcolando il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= (-1,1,0) \times ((-1,0,1) + \alpha\,(-1,1,0)) = \\ &= (-1,1,0) \times (-1,0,1) + \alpha\,(-1,0,1) \times (-1,0,1) = \\ &= 1 + 2\alpha. \end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (-1,1,0), \\ \mathbf{u}_2 &= (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \end{aligned}$$

formano una base ortogonale per $E(-3)$.

Prima di proseguire può essere utile, per escludere eventuali errori di calcolo, controllare che i vettori così ottenuti siano effettivamente ortogonali facendone il prodotto scalare e che appartengano a $E(-3)$ verificando che soddisfino il sistema che dà gli autovettori relativi all'autovalore -3.

Per ottenere una base ortonormale di $E(-3)$ basta ora dividere ciascun vettore della base ortogonale per la propria norma, ottenendo così i vettori $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Calcoliamo ora una base (non necessariamente ortonormale) dell'autospazio relativo a 0. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -2-0 & 1 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & 1 & -2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo (t, t, t) al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è allora formata dal vettore $(1, 1, 1)$. Poiché abbiamo un singolo vettore, per ottenere una base ortonormale di $E(0)$ è sufficiente dividere questo vettore per la propria norma, ottenendo così il vettore $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Abbiamo così trovato una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_k: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

È importante notare che il processo di ortonormalizzazione va applicato separatamente sulle basi di ciascun autospazio: se si considerasse una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e si applicasse a questa base il processo di ortonormalizzazione si otterrebbe una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che potrebbe non essere formata da autovettori di A_k. Inoltre, la base che abbiamo trovato è solo una delle possibili basi ortonormali di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_k.

Possiamo ora scrivere la matrice D e la matrice M. Per la matrice D basta scrivere lungo la diagonale gli autovalori determinati in precedenza, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Dunque

$$D := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice M riportiamo sulle sue colonne le componenti rispetto alla base canonica dei vettori della base ortonormale di autovettori di A_k che abbiamo determinato in precedenza:

$$M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Si sarebbe potuto scegliere anche un diverso ordine per gli autovalori: in tal caso anche la matrice M dovrebbe essere modificata di conseguenza.

Esercizio 5(a) Per determinare il punto C avremmo anche potuto determinare la retta passante per $O = (0,0)$ e $A = (3,1)$ la cui equazione cartesiana è $x - 3y = 0$ e la retta passante per $O = (0,0)$ e $B := (7,-2)$ la cui equazione cartesiana è $2x + 7y = 0$. Intersecando queste due rette troviamo le coordinate del punto C. Ovviamente questo metodo funziona perché i punti O, A e B non sono allineati, vale a dire il parallelogramma non è degenere.

Esercizio 5(c) Determiniamo innanzitutto le rette cui appartengono i lati del parallelogramma. La retta passante per $O = (0,0)$ e $A = (3,1)$ ha equazione cartesiana $x - 3y = 0$; la retta passante per $O = (0,0)$ e $B := (7,-2)$ ha equazione cartesiana $2x + 7y = 0$, la retta passante per B e C ha equazione cartesiana$x - 3y - 13 = 0$ e la retta passante per A e C ha equazione cartesiana $2x + 7y - 13 = 0$. Per ciascuna di queste rette dobbiamo trovare, tra i due semipiani che essa delimita, qual è quello che contiene i punti interni al parallelogramma. Ad esempio, data la retta passante per O e A, dobbiamo considerare il semipiano contenente il punto B (e di conseguenza anche il punto C). Sostituendo nel polinomio $x - 3y$ le coordinate di B, troviamo $7 - 3(-2) = 13$. Poiché $13 > 0$ la disequazione che ci interessa è $x - 3y > 0$. Analogamente troviamo le altre disequazioni.