Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 2(a)

M.A. Per risolvere questo esercizio si poteva anche determinare la retta r_{AB} passante per i punti A e B la cui equazione è $x - 3y + 60 = 0$ e la retta r_{CD} passante per i punti C e D la cui equazione è $x + y - 64 = 0$. Poiché le due rette non sono parallele, si intersecano in un punto H. Per vedere se H appartiene al segmento AB consideriamo i due semipiani in cui la retta r_{CD} divide il piano: questi semipiani sono descritti rispettivamente dalle disequazioni $x + y - 64 > 0$ e $x + y - 64 < 0$. Poiché $30 + 30 - 64 < 0$ e $39 + 33 - 64 > 0$ i punti A e B stanno in semipiani delimitati da r_{CD} diversi: pertanto il punto H sta sul segmento AB. Analogamente si vede che il punto H sta sul segmento CD.

I.D.E.A. Molti studenti hanno affermato che i segmenti AB e CD si intersecano poiché le rette r_{AB} e r_{BC} non sono parallele. Questa affermazione è chiaramente sbagliata. Infatti affinché i due segmenti si intersechino è *necessario* ma *non sufficiente* che le rette si intersechino. Le rette infatti si possono intersecare in un punto esterno ad uno o ad entrambi i segmenti. Si consiglia a questo proposito di dare qualche esempio.

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno affermato che i segmenti AB e BC si intersecano se i punti C e D appartengono a semipiani differenti delimitati dalla retta r_{AB}. Anche questa affermazione è sbagliata. Infatti in tal caso il punto di intersezione del segmento CD con la retta r_{AB} è chiaramente interno al segmento CD ma potrebbe essere esterno al segmento AB.

Esercizio 2 (b)

M.A. Abbiamo visto come rispondere alla domanda senza fare alcun calcolo e sfruttando il fatto che, se un segmento interseca una retta r in un suo punto interno, allora gli estremi del segmento appartengono a due semipiani differenti delimitati dalla retta r. Ovviamente si sarebbe potuto rispondere alla domanda determinando innanzitutto le condizioni verificate da tutti e soli i punti interni al triangolo di vertici A, B e C. Esse sono:

$$\begin{cases} x - 3y + \ \ 60 < 0 \\ x + 9y - 336 < 0 \\ x \qquad\ \ - \ \ 30 > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è ottenuta considerando dapprima l'equazione $x - 3y + 60 = 0$ della retta passante per i punti A e B e scegliendo tra le due disequazioni $x - 3y + 60 > 0$ e $x - 3y + 60 < 0$ quella verificata dal punto C. In modo analogo la seconda disequazione è ottenuta a partire dall'equazione della retta passante per B e C, mentre la terza è ottenuta a partire dall'equazione della retta passante per A e C (osserviamo a questo proposito che i punti B e C hanno entrambi l'ascissa uguale a 30 e quindi l'equazione della retta passante per essi è $x - 30 = 0$). Una volta determinate le tre disequazioni si osserva che le coordinate del punto D verificano solo la prima delle tre disequazioni e quindi il punto D non è interno al triangolo ABC.

Esercizio 3 (c)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno affermato che, poiché il nucleo di f ha dimensione uguale a 1, non esistono due vettori linearmente indipendenti che hanno la stessa immagine. Questa affermazione è sbagliata dal momento che il fatto che il nucleo ha dimensione uguale a 1 ci dice solamente che non esistono due vettori linearmente indipendenti che abbiano come immagine il vettore nullo. Esistono invece vettori linearmente indipendenti che hanno la stessa immagine.

A.U. Una rappresentazione geometrica può aiutare a capire. Ricordiamo che i sottospazi vettoriali di dimensione 1 possono essere pensati come rette passanti per l'origine, mentre i sottospazi affini di dimensione 1 possono essere pensati come rette non necessariamente passanti per l'origine. Nel nostro caso il nucleo corrisponde alla retta r passante per l'origine e avente $(1, 1, -2)$ come vettore direttore, mentre le controimmagini non vuote corrispondono alle rette parallele a r.

Se prendiamo quindi un vettore $\mathbf{v}$ non appartenente al nucleo e indichiamo con $\mathbf{w}$ la sua immagine tramite f (cioè $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, il sottospazio affine $\mathbf{v} + \ker f$ è formato da tutti i vettori aventi per immagine $\mathbf{w}$: questo sottospazio affine corrisponde a una retta s parallela a r e non passante per l'origine. Due vettori distinti qualunque di questo sottospazio affine (cioè aventi il punto finale su s) sono linearmente indipendenti perché se fossero linearmente dipendenti dovrebbero essere uno multiplo dell'altro e, in particolare, la retta passante per i loro punti finali (cioè s) dovrebbe passare per l'origine.

Esercizio 4(a)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno compiuto vari errori nel calcolo delle radici del polinomio caratteristico. Spesso l'errore è nato dalla lunghezza dei calcoli dovuta al fatto che si è scelto un metodo lungo per il calcolo del determinante. In questo caso conviene ovviamente sviluppare il determinante rispetto alla terza riga in modo tale che il polinomio caratteristico $\det(A - xI)$ sia automaticamente fattorizzato nel prodotto di $-x$ per un polinomio di secondo grado, le cui radici sono facili da calcolare.

I.D.E.A. Alcuni studenti, per calcolare il polinomio caratteristico di A, hanno innanzitutto operato sulla matrice A operazioni elementari di riga, ottenendo una matrice A'. Si tratta di un errore grave. Infatti operando operazioni elementari di riga, il determinante e il rango della matrice rimangono inalterati, *ma* variano autovettori ed autovalori.

Esercizio 4(b)

M.A. Si sarebbe potuto determinare una base dell'autospazio relativo a 0 osservando innanzitutto che il rango di A è uguale a 1 e quindi l'autospazio ha dimensione uguale a 2 (spiegare perché). Dobbiamo quindi determinare due vettori linearmente indipendenti aventi come immagine il vettore nullo. A tale scopo osserviamo che la matrice A ha la prima e la terza colonna uguali e quindi le immagini del primo e del terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa immagine (spiegare perché). Ne segue che il vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, differenza dei due vettori di cui sopra, ha come immagine il vettore nullo. Osserviamo poi che la seconda colonna della matrice A è il doppio della prima colonna. Ne segue che il vettore $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0)$ ha come immagine il vettore nullo (spiegare perché). Si verifica facilmente che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno calcolato in modo esatto i vettori dell'autospazio di f. Sono $(-2h-k, h, k)$. Hanno poi però assegnato in modo sbagliato i valori ai parametri. Ricordiamo il procedimento da seguire in questo caso. I parametri sono 2 , quindi l'autospazio ha dimensione 2. Una sua base si ottiene prima assegnando i valori $(1, 0)$ a (h, k) e poi assegnando i valori $(0, 1)$ a (h, k).

I.D.E.A. Vari studenti hanno scritto "Il vettore $(-2, 1, 0)$ forma una base di $E(0)$ e il vettore $(-1, 0, 1)$ forma un'altra base di $E(0)$". Questa affermazione è chiaramente sbagliata. Si sarebbe dovuto scrivere "Il vettore $(-2, 1, 0)$ è il primo vettore di una base di $E(0)$ e il vettore $(-1, 0, 1)$ è il secondo vettore".

I.D.E.A. Alcuni studenti, per fortuna pochi, hanno determinato autospazi la cui somma delle dimensioni è maggiore di 3. Si tratta di un gravissimo errore. Sappiamo infatti che i vettori delle singole basi degli autospazi, messi tutti insieme, sono linearmente indipendenti. Non possono essere quindi in numero superiore a 3.

Esercizio 4(c)

M.A. Per ottenere la matrice D basta scrivere lungo la diagonale gli autovalori determinati in precedenza, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio.

Dunque

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice M riportiamo sulle sue colonne le componenti rispetto alla base canonica dei vettori della base di autovettori di A che abbiamo determinato in precedenza:

$$M := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si sarebbe potuto scegliere anche un diverso ordine per gli autovalori: in tal caso si sarebbe dovuto modificare di conseguenza anche la matrice M (vedere il punto successivo).

I.D.E.A. Molti studenti hanno posto

$$D := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e

$$M := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un errore grave. Dal momento che abbiamo inserito al primo posto della diagonale principale della matrice D l'autovalore 5 dobbiamo scegliere come prima colonna della matrice M le coordinate del vettore di una base di $E(5)$. Analogamente, dato che abbiamo inserito al secondo e al terzo posto della matrice D il valore 0, dobbiamo inserire nella seconda e terza colonna della matrice M le coordinate di due vettori che formano una base di $E(0)$.

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno determinato una matrice M avente chiaramente il determinante nullo. Si tratta di un gravissimo errore. La matrice M deve avere il determinante non nullo dal momento che si deve avere $D = M^{-1}AM$.

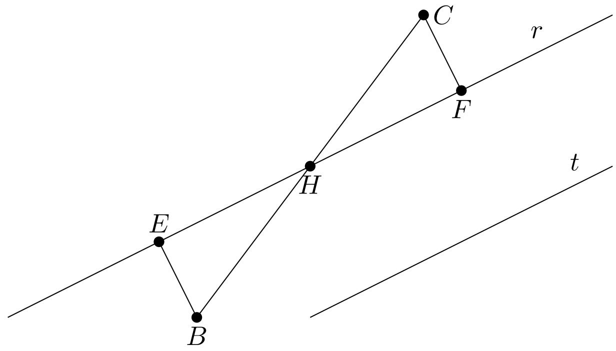
I.D.E.A. Alcuni studenti hanno posto sulla diagonale principale di D numeri che non sono autovalori di A. Grave errore: sulla diagonale principale di D compaiono solo gli autovalori di A. Si consiglia di dimostrare questa affermazione.

I.D.E.A. Alcuni studenti, pochi per la verità, hanno determinato per ogni autospazio una base ortonormale. In effetti non hanno compiuto alcun errore. Hanno però fatto tanti calcoli inutili. Infatti non è richiesto che la matrice M sia ortonormale. Osserviamo che, poiché la matrice A non è simmetrica, non esiste alcuna matrice M ortogonale che la diagonalizza. Osserviamo infine che, anche scegliendo basi ortonormali in ogni autospazio, in questo caso non si ottiene una base ortonormale per tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$. Infatti i vettori di $E(5)$ non sono ortogonali ad ambedue i vettori di una qualsiasi base di $E(0)$. Provare per credere.

Esercizio 5(a)

M.A. Si può risolvere questo esercizio anche trovando il punto medio $H = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (2, 2)$ di C e D, considerando il fascio di rette parallele a t: $x + 2y + k = 0$ e imponendo il passagio per H ottenendo così la condizione $2 + 2 \cdot 2 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = -6$ che dà quindi l'equazione $x + 2y - 6 = 0$.

Si può infatti dimostrare che ogni retta passante per il punto medio H di B e C è equidistante dai punti B e C. Se chiamiamo E la proiezione ortogonale di B su r e F la proiezione ortogonale di C su r vediamo che i triangoli BHE e CHF hanno gli angoli $\widehat{BEH}$ e $\widehat{CFH}$ uguali (perché retti), gli angoli in $\widehat{BHE}$ e $\widehat{CHF}$ uguali perché opposti al vertice e i lati BH e CH uguali (perché H è punto medio di B e C). Dunque i triangoli BHE e CHF sono uguali: in particolare i lati BE e CF sono uguali. Poiché la distanza di B da r è uguale alla distanza di B da E e la distanza di C da r è uguale alla distanza di C da F abbiamo che B e C sono equidistanti da r. Per completezza avremmo dovuto osservare che la retta passante per B e C non è parallela a t: in tal caso infatti i punti B e C sarebbero stati equidistanti da ciascuna retta parallela a t.



I.D.E.A. Alcuni studenti dopo aver determinato il punto medio H tra C e D hanno determinato la retta ortogonale al segmento CD passante per H (ottenendo così la retta di equazione $4x+2y-12=0$). Questa retta è l'asse del segmento ma non è parallela a t (che ha equazione $x+2y+5$). Il disegno dovrebbe aiutare a comprendere meglio la situazione.

Si noti che l'asse del segmento è la retta formata dai punti che sono equidistanti da B e C ma dicendo che una retta è equidistante da B e C non si intende dire che *ogni* punto della retta è equidistante da B e C. Anche qui, il disegno dovrebbe aiutare a comprendere meglio la situazione.

Esercizio 5(c)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno calcolato l'area dei triangoli ACH e ADH supponendo che fossero rettangoli in H cioè che la retta r fosse ortogonale alla retta passante per B e C. Questo errore è simile al precedente: la retta r *non* è l'asse del segmento B e C. Anche qui, il disegno dovrebbe aiutare a comprendere meglio la situazione.

Esercizio 6(a)

I.D.E.A. Alcuni studenti, dopo aver scritto l'equazione del fascio come $(\lambda+2\mu)x+(2\lambda+\mu)y+(-3\lambda-\mu)z+2\lambda+3\mu=0$ e aver notato che la retta s ha vettore direttore $(1,3,1)$ hanno imposto come condizione di parallelismo tra retta e fascio

$$1\cdot(\lambda+2\mu)+3\cdot(2\lambda+\mu)+1\cdot(-3\lambda-\mu)+2\lambda+3\mu=0$$

invece che

$$1\cdot(\lambda+2\mu)+3\cdot(2\lambda+\mu)+1\cdot(-3\lambda-\mu)=0.$$

La condizione

$$1\cdot(\lambda+2\mu)+3\cdot(2\lambda+\mu)+1\cdot(-3\lambda-\mu)+2\lambda+3\mu=0$$

non è la condizione di parallelismo tra piano e retta ma è, semmai, la condizione di passaggio per il punto $(1,3,1)$.

Per ricordare la condizione di parallelismo tra un piano e un vettore in un riferimento cartesiano si può ragionare così: il piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ è parallelo al vettore (m,n,p) se e solo se il vettore (a,b,c) (che è ortogonale al piano) è ortogonale al vettore (m,n,p) cioè se e solo se il prodotto scalare tra questi due vettori (cioè $am+bn+cp$ si annulla.

D'altra parte la condizione di parallelismo non può coinvolgere il termine noto del piano. Infatti i due piani $ax+by+cz+d=0$ e $ax+by+cz+d'=0$ sono tra loro paralleli e quindi ogni vettore $m,n,p)$ parallelo al primo piano è parallelo anche al secondo: se la condizione fosse $am+bn+cp+d=0$ avremmo (nel caso in cui $d\neq d'$) che $am+bn+cp+d'\neq 0$ cioè il vettore $m,n,p)$ sarebbe parallelo al primo piano ma non al secondo.