Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 2(b)

M.A. Per rispondere a questo esercizio si poteva anche osservare che, scelti comunque i parametri, le due rette non sono parallele per e quindi esistono infiniti piani, tutti tra loro paralleli, paralleli alle rette date. Pertanto esistono infinite rette, tutte tra loro parallele, perpendicolari a tali piani e quindi perpendicolari alle due rette. Una sola di queste rette passa per il punto A.

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno detto che dal momento che le rette r e s non sono parallele, allora non può esistere nessuna retta ortogonale a entrambe: la proprietà che rette ortogonali alla stessa retta sono fra loro parallele vale nel piano ma non nello spazio.

Esercizio 3(b)

I.D.E.A. Molti studenti hanno determinato la matrice M usando una base ortogonale. Ricordiamo che, nonostante il nome, per avere una matrice ortogonale, si deve considerare una base ortonormale. In effetti il nome "matrice ortogonale" può indurre in errore. D'altronde il nome è usato in tutto il mondo: non è quindi possibile modificarlo.

Esercizio 3(c)

M.A. Per determinare un'altra matrice ortogonale N a partire dalla matrice M, si potrebbe anche scambiare tra loro il secondo e terzo vettore e ottenere quindi la matrice

$$N := \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La diagonalizzata di A rispetto a questa nuova base è sempre la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

dal momento che il secondo e il terzo vettore sono autovettori con lo stesso autovettore.

I.D.E.A. Molti studenti hanno invece scambiato il primo con il secondo vettore. In tal caso però la diagonalizzata di A è la matrice

$$D' := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4(a)

I.D.E.A. Molti studenti hanno affermato che, affinché un sistema abbia una sola soluzione, il sistema deve essere Crameriano: deve cioè avere un ugual numero di equazioni e di incognite e il determinante della matrice dei coefficienti deve essere non nullo. Questa affermazione è falsa. Si pensi per esempio al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}.$$

Il numero delle incognite è diverso dal numero delle equazioni (e, quindi, non si può neanche fare il determinante della matrice del sistema, perché non è quadrata), eppure il sistema ha una sola soluzione. Fare i calcoli. È invece vera l'affermazione che ogni sistema Crameriano ha una sola soluzione. In altri termini gli studenti che hanno fatto questo errore hanno confuso tra condizione necessaria e condizione sufficiente.

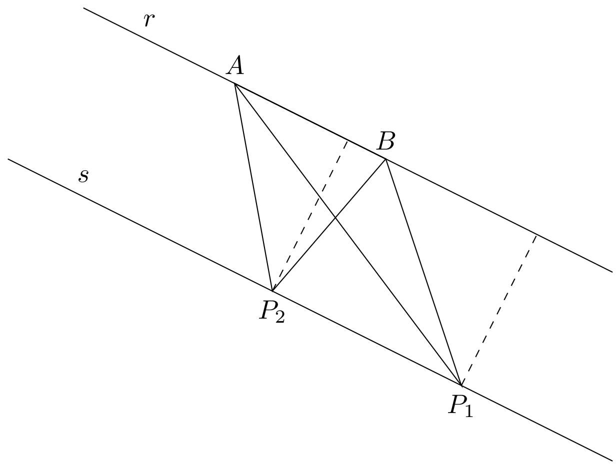
I.D.E.A. Molti studenti hanno compiuto un errore nel calcolo del rango della matrice A_t dei coefficienti del sistema. Hanno calcolato esattamente i valori per i quali si annullano i determinanti dei due minori orlati a partire dal minore formato dalle prime due righe e due colonne. Il determinante del primo minore si annulla per $t = 1$ e $t = -1$ mentre il determinante del secondo minore si annulla per $t = 0$ e $t = 1$. Fin qui tutto giusto. Hanno però commesso l'errore di affermare che il rango della matrice A è uguale a 2 per $t = -1$, $t = 1$ e $t = 0$. Infatti per $t = -1$ il determinante del primo minore si annulla ma il determinante del secondo minore è diverso da 0. Pertanto il rango della matrice A è uguale a 3. Analogamente per $t = 0$ il determinante del secondo minore si annulla ma il determinante del primo minore è diverso da 0. Pertanto il rango della matrice A è uguale a 3. Solo per $t = 1$ il rango della matrice A è uguale a 2. In tal caso infatti i determinanti di entrambi i minori si annullano.

Esercizio 5(a)

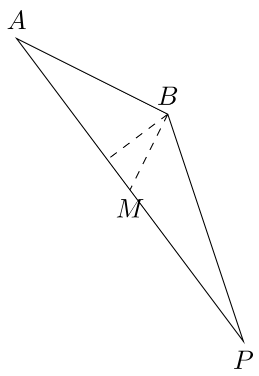
I.D.E.A Diversi studenti hanno risolto l'equazione $\sqrt{10t^2} = \sqrt{10}$ dicendo che era equivalente all'equazione $\sqrt{10}t = \sqrt{10}$ e ottenendo quindi la sola soluzione $t = 1$: la radice di t^2, tuttavia, non è t ma è $|t|$. Quindi l'equazione $\sqrt{10}t = \sqrt{10}$ ha le due soluzioni $t = 1$ e $t = -1$. Geometricamente questo corrisponde ai due quadrati di lato AB, posti simmetricamente rispetto alla retta passante per AB. Per determinare quale delle due soluzioni dell'equazione andasse scelta, occorreva considerare la condizione data dal testo dell'esercizio, che richiedeva che il quadrato fosse contenuto nel semipiano delimitato da r e contenente l'origine.

Esercizio 5(c)

A.U. Notiamo che non è necessario determinare esplicitamente il punto P per determinare l'area del triangolo ABP: infatti tutti i punti della retta s, essendo parallela alla retta r passante per A e B hanno la medesima distanza da r; in altri termini, tutti i triangoli ABP con vertice P sulla retta s hanno la stessa altezza relativa alla base AB e, quindi, la stessa area.



I.D.E.A Diversi studenti per calcolare l'area del triangolo ABP hanno scelto un certo lato come base (ad esempio AP) e poi per calcolare l'altezza relativa a tale base hanno calcolato la distanza del punto B dal punto medio M del lato AP: così facendo non si calcola la distanza di B dalla retta passante per il lato AP ma la lunghezza di una mediana. Queste due misure coincidono se e solo se $AB = BP$, cioè il triangolo è isoscele. Anche nel caso in cui il triangolo fosse stato isoscele (e non era questo il caso) si sarebbe dovuto osservarlo esplicitamente e dimostrarlo. Occorre fare attenzione a non fidarsi di quello che sembra di poter ricavare dalle figure.



I.D.E.A Diversi studenti per calcolare l'area del triangolo ABP hanno calcolato la misura di due lati (ad esempio AB e BP) e hanno espresso l'area come prodotto di questi due lati diviso 2. Ciò vale solo in un caso particolare, cioè quando il triangolo è rettangolo in B: valgono le stesse considerazioni appena esposte e cioè di non fidarsi delle figure.

Esercizio 6(a)

I.D.E.A Diversi studenti hanno commesso errori di calcolo nel ricavare le equazioni parametriche di una retta a partire dalle equazioni cartesiane. A parte consigliare maggior attenzione, può essere opportuno in questi casi fare una semplice verifica dei risultati ottenuti. Ad esempio, se dalle equazioni cartesiane della retta r:

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

ricaviamo queste equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases},$$

sostituendo le espressioni di x, y e z nelle equazioni cartesiane otteniamo

$$\begin{cases} 2(1+t) + (1-3t) - (2-t) - 1 = 0 \\ (1+t) + (1-3t) - 2(2-t) + 2 = 0 \end{cases}.$$

Dal momento che si ottengono de identità $0 = 0$ le equazioni parametriche sono corrette. Se non avessimo trovato delle identità ci saremmo accorti di aver commesso errori nella determinazione delle equazioni parametriche.

I.D.E.A Alcuni studenti hanno determinato in maniera corretta le equazioni parametriche delle due rette, ad esempio così: $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ ma hanno poi interpretato in maniera scorretta il risultato. Alcuni hanno osservato che poiché i parametri direttori delle due rette sono proporzionali allora le due rette sono coincidenti: la proporzionalità dei parametri direttori ci dà però solo il parallelismo. Altri hanno osservato che le rette sono parallele e, per giustificare il fatto che fossero distinte, hanno usato il fatto che r passa per il punto $(1, 1, 2)$ mentre s passa per il punto $(2, 2, 1)$: questo non è sufficiente per dire che le due rette sono diverse, infatti la stessa retta può essere rappresentata in modi diversi, in particolare prendendo come punto corrispondente al valore 0 del parametro t un qualunque punto della stessa retta.

Esercizio 6(b)

M.A. Si poteva anche ragionare in questo modo: dopo aver visto che s ha parametri direttori $(1, 1, -2)$ consideriamo il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(x + y + z - 5) + \mu(3x - y + z - 1) = 0,$$

vale a dire

$$(\lambda + 3\mu)x + (\lambda - \mu)y + (\lambda + \mu)z - 5\lambda - \mu = 0.$$

Ora imponiamo la condizione di parallelismo tra il piano generico del fascio e la retta s ottenendo la condizione

$$(\lambda + 3\mu) \cdot 1 + (\lambda - \mu) \cdot 1 + (\lambda + \mu) \cdot (-2) = 0,$$

che, sviluppata, dà $0 = 0$ cioè un'identità soddisfatta da tutti i valori di λ e μ. Pertanto tutti i piani passanti per r sono paralleli a μ.

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno impostato correttamente il problema come descritto poco sopra, ma, arrivati all'identità $0 = 0$ hanno dedotto che non c'era nessun piano: ricordiamo che quando si ottiene un'identità significa che tutti i valori possibili sono soluzioni.

Esercizio 6(c)

M.A. Si poteva anche ragionare in questo modo: dopo aver visto che s ha parametri direttori $(1, 1, -2)$ consideriamo il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(x + y + z - 5) + \mu(3x - y + z - 1) = 0,$$

vale a dire

$$(\lambda + 3\mu)x + (\lambda - \mu)y + (\lambda + \mu)z - 5\lambda - \mu = 0.$$

La condizione di ortogonalità tra il piano generico del fascio e la retta s può essere espressa dicendo che i vettori $(\lambda + 3\mu, \lambda - \mu, \lambda + \mu)$ e $(1, 1, -2)$ sono proporzionali: poiché non ci sono valori per cui ciò accade, possiamo concludere che non ci sono piani passanti per r e ortogonali a s.