- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 1(b)

M.A. L'omomorfismo f può essere descritto esplicitamente così $f(x, y) := (x + 2ky, 2x + 4ky)$. Dunque il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f solo per quei valori di k per cui il sistema

$$\begin{cases} x + 2ky = 4 \\ 2x + 4ky = 1 \end{cases}.$$

Questo sistema è chiaramente non risolubile qualunque sia k.

I.D.E.A. Diversi studenti hanno calcolato il determinante della matrice A e, dopo, aver visto che è uguale a 0 qualunque sia k e aver ricavato da ciò che l'immagine di f_k ha dimensione 1, hanno dedotto da questo fatto che il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di f_k senza in alcun modo utilizzare il vettore $\mathbf{v}$ stesso. Questo non è ovviamente sufficiente: il fatto che la dimensione dell'immagine sia 1 e non 2 ci dice solo che ci sono alcuni vettori che appartengono all'immagine e alcuni vettori che non appartengono all'immagine: per vedere quali vettori appartengono e quali no è necessaria un'indagine ulteriore.

Esercizio 2(a)

I.D.E.A. Diversi studenti dopo aver ottenuto l'equazione $|16 - 6t| = 20$ l'hanno risolta ponendo $16 - 6t = 20$ e ottenendo così un solo punto. Ricordiamo che l'equazione $|16 - 6t| = 20$ è soddisfatta anche nel caso in cui $16 - 6t = -20$.

Esercizio 2(b)

M.A. Un punto è equidistante dai punti (distinti) A e B se e solo se appartiene all'asse del segmento AB. Per determinare l'equazione di tale asse, calcoliamo innanzitutto il punto medio di A e B ottenendo il punto $M := \left(\frac{3+5}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (4, -1)$. I parametri direttori della retta passante per A e B sono $(5 - 3, -3 - 1) = (2, -4)$. Dunque la generica retta ortogonale alla retta passante per A e B ha equazione cartesiana del tipo $2x - 4y + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto M otteniamo la condizione $2 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) + k = 0$ da cui otteniamo $k = -12$. L'asse del segmento AB ha quindi equazione $2x - 4y - 12 = 0$. Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $2(1 + t) - 4(-3 + t) - 12 = 0$, vale a dire $-2t + 2 = 0$, la cui soluzione $t = 1$, sostituita nelle equazioni parametriche di r, dà le coordinate $(2, -2)$ del punto D cercato.

Esercizio 2(a)

I.D.E.A. Diversi studenti hanno calcolato il determinante di uno solo degli orlati di B. Per imporre che il rango sia 2 occorre che tutti gli orlati abbiano determinante nullo.

I.D.E.A. Diversi studenti hanno calcolato correttamente i determinanti degli orlati di B e hanno visto che $\det C_1 = 0$ per $k = 1$ o $k = 2$, mentre $\det C_2 = 0$ per $k = 1$ o $k = \frac{3}{2}$. Hanno poi preso come soluzione $k = 1$, $k = 2$ e $k = \frac{3}{2}$. Ricordiamo che affinché il rango sia 2 occorre prendere i valori per cui i determinanti di questi minori si annullano entrambi, il che avviene solo per $k = 1$.

Esercizio 3(c)

A.U. Sappiamo che il rango della matrice A_k è 2, dunque l'immagine di f_k ha dimensione 2. Poiché le prime 2 colonne di A_k sono linearmente indipendenti, possiamo prendere come base per l'immagine di f_k quella formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,1,1,1)$ e $\mathbf{v}_2 := (2,3,1,2)$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono date dalle prime 2 colonne di A_k.

Applichiamo ora il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Poniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &:= \mathbf{v}_1,\\ \mathbf{u}_2 &:= \mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{u}_1.\end{aligned}$$

Calcolando il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= (1,1,1,1) \times ((1,1,1,1) + \alpha\,(2,3,1,2)) =\\ &= (1,1,1,1) \times (1,1,1,1) + \alpha\,(1,1,1,1) \times (2,3,1,2) =\\ &= 4 + 8\alpha.\end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (1,1,1,1)\,,\\ \mathbf{u}_2 &= (1,1,1,1) - \frac{1}{2}\,(2,3,1,2) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

formano una base ortogonale dell'immagine di f_k.

Prima di proseguire può essere utile, per escludere eventuali errori di calcolo, controllare che i vettori così ottenuti siano effettivamente ortogonali facendone il prodotto scalare.

Per ottenere una base ortonormale dell'immagine di f_k basta ora dividere ciascun vettore della base ortogonale per la propria norma, ottenendo così i vettori $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Esercizio 4(b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno detto che la matrice A non è diagonalizzabile perché non è simmetrica. Sappiamo che tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ma le matrici non simmetriche possono essere sia diagonalizzabili che non diagonalizzabili.

Esercizio 4(c)

A.U. Se esiste un autovettore relativo all'autovalore 0 contenuto in E allora l'intersezione tra E e l'autospazio $E(0)$ ha dimensione almeno 1 (ricordiamo che un autovettore è, per definizione, non nullo). D'altra parte, sappiamo $E(0)$ ha dimensione 1, dunque, esiste un autovettore relativo all'autovalore 0 contenuto in E se e solo se l'intersezione tra E e l'autospazio $E(0)$ ha dimensione esattamente 1, cioè se e solo se $E(0)$ è contenuto in E. Poiché $E(0)$ è generato da $(0,1,2)$ dobbiamo verificare se questo vettore è combinazione lineare dei vettori $(1,1,1)$ e $(1,2,3)$ che generano E. Questi 2 vettori sono linearmente indipendenti. Se ora consideriamo la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti rispetto alla base canonica dei vettori che generano E e dell'autovettore che genera l'autospazio relativo all'autovalore nullo, vediamo che questa matrice ha determinante nullo. Pertanto i 3 vettori sono linearmente dipendenti: poiché $(1,1,1)$ e $(1,2,3)$ sono linearmente indipendenti, ciò significa che $(0,1,2)$ è combinazione lineare di $(1,1,1)$ e $(1,2,3)$, cioè l'autovettore $(0,1,2)$ appartiene ad E.

Se analogamente consideriamo la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti rispetto alla base canonica dei vettori che generano E e dell'autovettore che genera l'autospazio relativo all'autovalore 2, vediamo che questa matrice ha determinante non nullo. Dunque $(1,2,2)$ non appartiene ad E. Con ragionamento analogo a quello utilizzato per l'autovalore 0 possiamo concludere che non c'è alcun autovettore relativo all'autovalore 2 contenuto in E.

Esercizio 5(a)

M.A. La generica circonferenza di centro $(1,1)$ ha equazione $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$. Mettendo a sistema con l'equazione della retta $r: 2x+3y-18=0$ e risolvendo il sistema otteniamo i punti $\left(3+\frac{3\sqrt{r^2-13}}{\sqrt{13}}, 4-\frac{2\sqrt{r^2-13}}{\sqrt{13}}\right)$ e $\left(3-\frac{3\sqrt{r^2-13}}{\sqrt{13}}, 4+\frac{2\sqrt{r^2-13}}{\sqrt{13}}\right)$. Calcolando la distanza tra questi due punti si trova $2\sqrt{r^2-13}$. Ponendo questa quantità uguale a 4 otteniamo l'equazione $2\sqrt{r^2-13}=4$ da cui otteniamo $r^2=17$.

Questo metodo ha richiesto molti più calcoli rispetto a quello presentato nelle soluzioni.

Esercizio 5(c)

M.A. Mettendo a sistema l'equazione della circonferenza $\gamma_2: (x-1)^2+(y-1)^2=26$ con l'equazione della retta $r: 2x+3y-18=0$ e risolvendo il sistema otteniamo i punti $D:=(6,2)$ e $E:=(0,6)$. La tangente in D alla circonferenza γ_2 è ortogonale al raggio congiungente C con D i cui parametri direttori sono $(6-1, 2-1)=(5,1)$. La generica retta perpendicolare al raggio congiungente C con D ha allora equazione cartesiana $5x+y+k=0$. Imponendo il passaggio per D troviamo la condizione $5\cdot 6+2+k=0$ da cui otteniamo $k=-32$. La tangente in D a γ_2 ha allora equazione $5x+y-32=0$. La tangente in E alla circonferenza γ_2 è ortogonale al raggio congiungente C con E i cui parametri direttori sono $(0-1, 6-1)=(-1,5)$. La generica retta perpendicolare al raggio congiungente C con E ha allora equazione cartesiana $-x+5y+k=0$. Imponendo il passaggio per E troviamo la condizione $-0+5\cdot 6+k=0$ da cui otteniamo $k=-30$. La tangente in E a γ_2 ha allora equazione $-x+5y-30=0$. Intersecando le due tangenti otteniamo il punto $F:=(5,7)$. La distanza di F da C è uguale a $\sqrt{(5-1)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

Questo metodo ha richiesto molti più calcoli rispetto a quello presentato nelle soluzioni.

Esercizio 6(a)

I.D.E.A. Diversi studenti dopo aver ottenuto l'equazione $|6t+12|=6$ l'hanno risolta ponendo $6t+12=6$ e ottenendo così un solo punto. Ricordiamo che l'equazione $|6t+12|=6$ è soddisfatta anche nel caso in cui $6t+12=-6$.