- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 1(a)

I.D.E.A. Diversi studenti hanno considerato la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica e hanno poi calcolato il determinante dei due minori $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ orlati del minore formato dal solo numero 3. Poiché i due determinanti sono, rispettivamente, $k-6$ e $3-k$ hanno concluso che i due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 3$ e $k \neq 6$. Affinché il rango della matrice sia 2 non è però necessario che entrambi i minori hanno determinante non nullo: basta che uno solo dei due abbia determinante non nullo. Non c'è nessun valore di k per cui i determinanti dei due minori si annullano entrambi, quindi per ogni valore di k almeno un minore di ordine 2 ha determinante non nullo, cioè la matrice ha rango 2 per ogni valore di k.

Esercizio 1(b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno trovato correttamente il valore per cui i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali, ma non hanno poi spiegato come trovare un terzo vettore ortogonale ai primi due.

Esercizio 2(b)

M.A. Se non si fosse osservato che la retta r è contenuta nel piano si poteva procedere così. La retta s passante per i punti A e B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + (4-3)t \\ y = 1 + (-2-1)t \\ z = 2 + (3-2)t \end{cases}.$$

I punti del segmento di estremi A e B sono quelli corrispondenti ai valori del parametro t compresi tra 0 e 1. Intersechiamo ora la retta s con la retta r e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} (3+t) + (1-3t) + 2(2+t) - 8 = 0 \\ 2(3+t) + (1-3t) - 3(2+t) + 11 = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -4t + 12 = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema è risolubile e ha come soluzione $t = 3$: dunque le rette r e s hanno un punto in comune. Poiché questo punto corrisponde a un valore del parametro t non compreso tra 0 e 1, tale punto non appartiene al segmento di estremi A e B. Ovviamente se il sistema non avesse avuto soluzione, ciò significava che le rette r e s non avevano punti in comune e, a maggior ragione, il segmento di estremi A e B e la retta r non avevano punti in comune.

Esercizio 4(a)

A.U. Vediamo in dettaglio come calcolare il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned}\det(A - xI) &= \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -2 \\ -4 & -x & 4 \\ 2 & 1 & -x \end{vmatrix} = \\ &= (4-x)\begin{vmatrix} -x & 4 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -x \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (4-x)(x^2-4) - (4x-8) - 2(-4+2x) = \\ &= 4x^2 - 16 - x^3 + 4x - 4x + 8 + 8 - 4x = \\ &= -x^3 + 4x^2 - 4x = -x(x-2)^2.\end{aligned}$$

Si osservino attentamente i vari passaggi e i raccoglimenti che hanno permesso di semplificare i calcoli.

Esercizio 4(b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno sbagliato a calcolare il polinomio caratteristico e, quindi gli autovalori. Quando poi hanno calcolato l'autospazio relativo a un numero che non è un autovalore hanno trovato come soluzione lo spazio nullo e hanno preso come base il vettore nullo. Questo avrebbe dovuto far capire che il valore considerato non era un autovalore: infatti per definizione di autovalore ed autovettore, un autospazio ha sempre dimensione almeno 1.

Esercizio 4(c)

I.D.E.A. Alcuni studenti che hanno sbagliato a calcolare qualche autospazio (ad esempio prendendo come base per uno di essi il vettore nullo, oppure prendendo come una base formata da due vettori linearmente dipendenti) hanno ottenuto come matrice di passaggio una matrice chiaramente non invertibile (proseguendo l'esempio appena fatto, perché ha una colonna nulla o due colonne multiple una dell'altra).

Esercizio 5(b)

M.A. Se non si osserva che la distanza di A da s e la distanza di B da s sono uguali, si può ovviamente anche calcolare indipendentemente la distanza di A da s e la distanza di B da s.

Esercizio 5(c)

A.U. Si noti che nella soluzione data non si è determinato esplicitamente il punto C.

I.D.E.A. Diversi studenti hanno preso il lato AM come base e per calcolare l'altezza relativa a tale base hanno poi calcolato la distanza di Cdal punto M (o dal punto A). Ricordiamo che l'altezza è la distanza del punto C dalla retta passante per A e B.

Esercizio 6(b)

I.D.E.A. Diversi studenti hanno imposto che i piani cercati avessero distanza 4 dal centro della sfera: in questo modo non si ottengono però come intersezione circonferenze di raggio 4.

Esercizio 6(c)

M.A. Si può notare che i centri delle circonferenze sono le proiezioni ortogonali del centro della sfera sui piani trovati al punto b. Poiché sappiamo che i due piani distano 3 dal centro della sfera, ciò significa che i centri delle circonferenze distano 3 dal centro della sfera. Inoltre i centri delle circonferenze appartengono alla retta s passante per P e ortogonale al piano di equazione $x - 2y + 2z + 4 = 0$. La retta s ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + \ \ t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}.$$

Imponendo che il generico punto di questa retta $(3+t, 1-2t, 2+2t)$ abbia distanza 3 dal centro P della sfera otteniamo la condizione $\sqrt{(3+t-3)^2+(1-2t-1)^2+(2+2t-2)^2} = 3$, cioè $9t^2 = 9$ le cui due soluzioni $t = 1$ e $t = -1$, sostituite nelle equazioni parametriche di s danno i punti cercati.