Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 2(a)

M.A. Per rispondere a questo esercizio si può anche evitare di determinare esplicitamente le equazioni parametriche della retta r. Interessa infatti solo sapere se la retta e l'iperpiano hanno intersezioni e quindi se la retta e iperpiano sono paralleli o no. Per verificare ciò si considera il vettore $\mathbf{v}$ parallelo alla retta passante per A e B avente come componenti la differenza delle coordinate dei due punti e il vettore $\mathbf{w}$ ortogonale all'iperpiano avente come componenti i coefficienti delle variabili nella sua equazione cartesiana. Si verifica che il prodotto scalare di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è non nullo e quindi retta e iperpiano non sono paralleli. Si intersecano quindi in un punto.

Esercizio 2(b)

M.A. Per rispondere a questo esercizio si può considerare il valore del parametro t per il quale si ottiene l'intersezione tra la retta e l'iperpiano, calcolato risolvendo la prima parte dell'esercizio. Se esso è compreso tra 0 e 1, allora il punto di intersezione tra la retta e l'iperpiano appartiene al segmento, altrimenti no.

M.A. Molti studenti hanno risolto innanzitutto questa seconda parte e poi la prima parte. Se vi è intersezione tra iperpiano e segmento allora a maggior ragione vi è intersezione tra iperpiano e retta, dal momento che la retta contiene in segmento.

I.D.E.A. Non è però vero il viceversa: se non vi è intersezione tra iperpiano e segmento, ciò non implica necessariamente che non vi sia intersezione tra iperpiano e retta. Molti studenti hanno fatto questo errore.

Esercizio 3(a)

I.D.E.A. Moltissimi studenti hanno verificato giustamente che si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -k & -k \\ 1 & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per qualsiasi valore di k. Purtroppo da ciò hanno dedotto erroneamente che per ogni valore di k il nucleo di f_k è generato dal vettore $(0, 1, -1)$. Invece da ciò deriva solamente che il vettore $(0, 1, -1)$ appartiene al nucleo di f_k per ogni valore di k.

Esercizio 3(b)

I.D.E.A Alcuni studenti hanno scritto che la matrice è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica. Questo non è vero: una matrice è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica.

Esercizio 3(c)

A.U. Per determinare le matrici D e M cerchiamo una base di $E(0)$ e una base di $E(1)$. Abbiamo visto che che $E(1)$ ha dimensione uguale a 1 e che $E(0)$ ha dimensione uguale a 2.

Cerchiamo una base di $E(1)$. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(t, 2t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(1)$ è allora formata dal vettore $\mathbf{v}_1 := (1, 2, 1)$.
Analogamente per trovare una base di $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 0 \\ 2 & 0-0 & 0 \\ 1 & 0 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(0, t, u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$è allora formata dai vettori $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
Possiamo ora scrivere la matrice D e la matrice M. Per la matrice D basta scrivere lungo la diagonale gli autovalori determinati in precedenza, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Dunque

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice M riportiamo sulle sue colonne le componenti rispetto alla base canonica dei vettori della base di autovettori di che abbiamo determinato in precedenza:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si sarebbe potuto scegliere anche un diverso ordine per gli autovalori: in tal caso anche la matrice M dovrebbe essere modificata di conseguenza.
Osserviamo che di matrici M non vi è solo questa. Per trovarle tutte bisogna scegliere una base qualsiasi di $E(1)$, quindi $(t, 2t, t)$ con $t \neq 0$ e una base qualsiasi di $E(0)$, quindi $(0, a, b)$ e $(0, c, d)$ con $ad - bc \neq 0$. Ne segue che tutte le matrici M tali che $M^{-1}AM = D$ con D la matrice di cui sopra, sono:

$$M = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 2t & a & c \\ t & b & d \end{pmatrix}$$

dove $t \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

Esercizio 4(c)

A.U. Per determinare una base ortonormale di F cerchiamo innanzitutto una base ortogonale di F. Fissiamo come primo vettore il vettore $\mathbf{u}$. Consideriamo ora tutti i vettori di F. Essi sono dati dalle combinazioni lineari di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a(1, 1, 0, 0) + b(1, 0, 4, 1) = (a + b, a, 4b, b).$$

Scegliamo tra questi i vettori perpendicolari a $\mathbf{u}$:

$$(1, 1, 0, 0) \times (a + b, a, 4b, b) = a + b + a = 2a + b = 0$$

da cui segue $b = -2a$. Ponendo $a = -1$ e $b = 2$, otteniamo il vettore $\mathbf{w} = (1, -1, 8, 2)$. Dividendo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ per le loro norme otteniamo una base ortonormale.

I.D.E.A. Molti studenti, nel determinare una base ortonormale, hanno compiuto alcuni errori di calcolo di cui avrebbero potuto accorgersi con poca fatica se alla fine avessero verificato se la base ottenuta era effettivamente ortonormale. Per far ciò avrebbero dovuto innanzitutto verificare se i due vettori ottenuti erano tra loro ortogonali calcolando il loro prodotto scalare e quindi verificare se i due vettori avevano norma uguale a 1 calcolando il prodotto scalare di ognuno dei due vettori per se stesso.

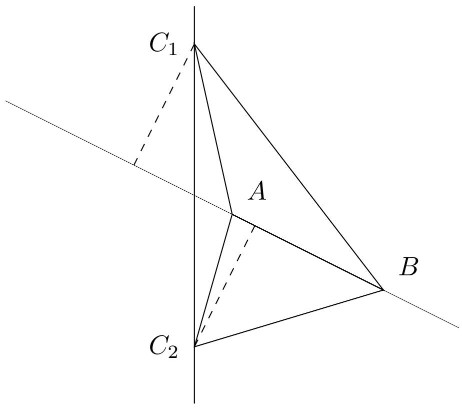
Esercizio 5

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno utilizzato la retta r, su cui variava uno dei vertici del triangolo come se essa fosse un lato del triangolo: ad esempio per determinare l'altezza oppure l'asse di un lato hanno considerato la retta ortogonale a tale retta.

Esercizio 5(a)

I.D.E.A. Molti studenti, dopo essere arrivati all'equazione $|25 - 15t| = 10$, l'hanno risolta semplicemente ponendo $25 - 15t = 10$ e trovando solo il valore 1 (oppure solo l'altro valore). Dire che il valore assoluto di $25 - 15t$ è uguale a 10 significa che $25 - 15t$ è uguale a 10 o a -10 da cui otteniamo due soluzioni.

Il fatto che ci debbano essere due soluzioni poteva essere previsto prima ancora di fare i calcoli con un semplice ragionamento geometrico. I punti A e B sono fissati mentre il punto C varia sulla retta r: dunque, prendendo AB come base, cercare C in modo che l'area sia assegnata significa semplicemente cercare C in modo che l'altezza relativa alla base AB (cioè la distanza del punto C dalla retta AB) sia assegnata. Esistono due punti sulla retta r con questa caratteristica e questi punti stanno su semipiani opposti rispetto alla retta AB. Il disegno può aiutare a comprendere meglio (il disegno è puramente qualitativo: le posizioni e le distanze reciproche tra i vari punti non rispettano i dati assegnati dal problema).



Esercizio 5(b)

M.A. Per trovare il punto D si poteva anche osservare che, dovendo essere equidistante da A e B, questo punto deve appartenere all'asse del segmento AB. Per determinare tale asse si può considerare la retta passante per il punto medio $M := \left(\frac{2+1}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ di A e B e ortogonale alla retta passante per A e B. Poiché la retta passante per A e B ha parametri direttori $(2-1, 4-7) = (1, -3)$, la generica retta ad essa ortogonale ha equazione cartesiana $x - 3y + k = 0$. Imponendo il passaggio per M otteniamo la condizione $\frac{3}{2} - 3\frac{11}{2} + k = 0$ da cui otteniamo $k = 15$. L'asse del segmento AB ha, dunque, equazione cartesiana $x - 3y + 15 = 0$. Intersecando questa retta con r troviamo il punto D.

Esercizio 5(c)

M.A. Poiché il triangolo è isoscele la bisettrice cercata è oltre che mediana (metodo usato nelle soluzioni pubblicate) anche asse del lato AB e altezza relativa al lato AB. Si poteva quindi determinare usando una qualsiasi di queste proprietà.

Esercizio 6(a)

M.A. Il piano π poteva essere determinato anche osservando che dovendo contenere la retta r doveva appartenere al fascio di piani passante per r. Per determinare l'equazione di tale fascio occorre innanzitutto ottenere delle equazioni cartesiane di r a partire dalle sue equazioni parametriche. Ad esempio si può scrivere così:

$$\begin{cases} 2x - 3y \phantom{{}+3z} + 1 = 0 \\ 4x \phantom{{}-3y} + 3z - 22 = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani contenente r ha allora equazione

$$\lambda(2x - 3y + 1) + \mu(4x + 3z - 22) = 0$$

o, equivalentemente,

$$(2\lambda + 4\mu)x - 3\lambda y + 3\mu z + (\lambda - 22\mu) = 0.$$

Imponendo l'ortogonalità con π otteniamo la condizione

$$(2\lambda + 4\mu) \cdot 2 - 3\lambda \cdot 1 + 3\mu \cdot (-1) = 0$$

vale a dire $\lambda + 5\mu = 0$. Scegliendo, ad esempio, $\mu = -1$ e $\lambda = 5$ e sostituendo questi valori nell'equazione del fascio, troviamo l'equazione del piano cercata.

Esercizio 6(b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno imposto che la proiezione ortogonale di r sul piano π fosse una retta ortogonale a r stessa, ma questa non è la definizione di proiezione ortogonale.