

DOTTORATO DI RICERCA
MODELLI E METODI MATEMATICI
PER LA TECNOLOGIA E LA SOCIETA'
Esame di Ammissione XVII ciclo
Prova Scritta: 19 ottobre 2001

Compito N. 1

Il candidato svolga **uno solo** dei seguenti temi:

(A) Illustrare le linee generali della teoria della forma canonica di Jordan, fornendo la dimostrazione di uno o più risultati ritenuti più significativi.

(B) Esaminare i concetti di indipendenza stocastica e scambiabilità, con riferimento in particolare a esperimenti aleatori di estrazione con o senza restituzione da un'urna di composizione nota o incognita.

(C) Presentare le linee generali della teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti e illustrarne alcune applicazioni interessanti.

(D) Molti fenomeni fisici possono essere descritti da equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del secondo ordine. Illustrare, attraverso degli esempi, i vari tipi di equazioni incontrati e discuterne le differenti proprietà fisico-matematiche.

(E) Esistenza e stabilità delle orbite periodiche nella meccanica celeste, oscillazioni non lineari in fisica, chimica e biologia, teoria delle particelle elementari sono solo alcuni dei numerosi argomenti che nella loro trattazione richiedono la soluzione di sistemi di equazioni non lineari. Il candidato illustri le principali idee che sono alla base dei metodi iterativi per l'approssimazione delle soluzioni reali del problema:

$$f(x) = 0$$

limitandosi al caso $x \in \mathbf{R}^1$, e dettagliando un metodo particolare.

Successivamente il candidato risolva **almeno tre** dei seguenti esercizi, scelti in **tre aree diverse** fra le cinque (A), (B), (C), (D), (E).

(A)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K .

1. Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo e si supponga che il polinomio minimo m di T sia $m = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ con p_i polinomi distinti, della forma $p_i = x - c_i$. Sia S_i il nucleo di $p_i(T)^{r_i}$, $i = 1, \dots, k$. Risulta allora $V = S_1 \oplus \dots \oplus S_k$.

Se ϕ_i , $i = 1, \dots, k$, è la proiezione di V su S_i allora T commuta con ciascun ϕ_i . Dimostrare che l'endomorfismo definito da

$$D = c_1\phi_1 + \dots + c_k\phi_k$$

è diagonalizzabile. D viene detto la parte diagonale di T . Inoltre se consideriamo $N = T - D$, poiché $T = T\phi_1 + \dots + T\phi_k$ allora $N = (T - c_1)\phi_1 + \dots + (T - c_k)\phi_k$. Dimostrare che

$$N^r = (T - c_1)^r \phi_1 + \dots + (T - c_k)^r \phi_k$$

e dedurre che N è nilpotente.

2. Data $T : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, trovare il polinomio caratteristico e minimo di T . Calcolare la decomposizione $T = D + N$ e le matrici di D e N nella stessa base canonica.

(B)

1. Da un lotto di 5 componenti, di composizione incognita, si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Sia H_r l'evento "nel lotto vi sono r pezzi difettosi" e si assuma $P(H_r) = cost, r = 0, 1, \dots, 5$. Inoltre, sia E_i l'evento "l' i -mo pezzo estratto è difettoso". Verificare che gli eventi E_1, E_2 sono scambiabili e calcolare la probabilità condizionata $P(E_3 | E_1 E_2)$.

2. Dati $2n$ numeri aleatori $X_1, \dots, X_n, \dots, X_{2n}$, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, sia $Y = a(X_1 + \dots + X_n - X_{n+1} - \dots - X_{2n})$. Stabilire per quali valori della costante a il numero aleatorio Y ha distribuzione normale standard.

(C)

1. Sia

$$f(x) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

una funzione continua e decrescente tale che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Provare che esiste finito l'integrale improprio :

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin x \, dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) \sin x \, dx$$

2. Calcolare l'integrale curvilineo della seguente forma differenziale lineare

$$\int_{+\gamma} \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

dove γ è la curva $y = 3 \cos x$ per $x \in [-\pi, \pi]$ orientata nel verso delle x crescenti.

(D)

1. Un cilindro circolare di raggio a e densità σ viene posto, con asse orizzontale, all'interno di un fluido non viscoso incomprimibile di densità ρ . Esso è libero di muoversi in direzione verticale mantenendo però il suo asse sempre orizzontale.

Si assuma che il cilindro sia di larghezza unitaria, limitato da due pareti verticali lisce, mentre nelle altre direzioni il dominio è illimitato.

Ricavare l'espressione dell'accelerazione con cui si muove il cilindro e discuterne il tipo di moto in funzione di σ e ρ .

2. Una sbarra rigida libera omogenea pesante di lunghezza l e massa M è contenuta inizialmente in un piano verticale in una posizione che forma con la verticale un angolo $\pi/4$. L'atto di moto iniziale è rotatorio con velocità angolare $\vec{\omega}_0$ attorno ad un asse verticale passante per il baricentro G della sbarra. Studiare il moto in un riferimento solidale alla Terra.

(E)

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & k & -1 \\ 0.5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

individuare i valori di k per cui A è definita positiva (ossia simmetrica e con i determinanti principali di testa positivi), e individuare tra di essi quelli per cui risulti $\|A\|_1$ minima.

2. L'equazione dell'oscillatore di Van der Pool

$$y''(t) - \mu(1 - y^2(t))y'(t) + y(t) = 0,$$

dove μ è un parametro reale, è da risolvere numericamente assumendo $\mu = 0.1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $h = 0.2$. Si forniscano i valori dei primi due passi del metodo di Runge-Kutta del secondo ordine o del metodo di Eulero-Cauchy.

**DOTTORATO DI RICERCA
MODELLI E METODI MATEMATICI
PER LA TECNOLOGIA E LA SOCIETA'**
Esame di Ammissione XVII ciclo
Prova Scritta: 19 ottobre 2001

Compito N. 2

Il candidato svolga **uno solo** dei seguenti temi:

(A) Illustrare le linee generali della teoria delle forme quadratiche e delle forme bilineari su uno spazio vettoriale V su un campo F e dare qualche applicazione saliente.

(B) Esaminare il concetto di probabilità condizionata, illustrando il suo ruolo nell'inferenza statistica.

(C) Presentare la teoria del problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie e illustrarne alcune applicazioni interessanti.

(D) Sufficienza delle equazioni cardinali della stereodinamica per lo studio del moto di un corpo rigido libero.

(E)

La teoria dell'approssimazione di dati e funzioni è alla base di varie applicazioni, dal disegno industriale, alla compressione delle immagini alla meteorologia. Il candidato descriva i principali concetti relativi all'interpolazione polinomiale di funzioni reali, definite su un intervallo $[a, b]$ fornendo anche una stima dell'errore.

Successivamente il candidato risolva **almeno tre** dei seguenti esercizi, scelti in **tre aree diverse** fra le cinque (A), (B), (C), (D), (E).

(A)

1. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e sia data la curva \mathcal{C} di equazioni parametriche $x = t^2, y = \frac{1}{2}, z = t$. Trovare le equazioni parametriche del cono C che proietta la curva da O e verificare che $z^2 - 2xy = 0$ è un'equazione cartesiana di C . Calcolare la matrice associata alla forma quadratica $Q(v) = z^2 - 2xy$ nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Calcolare una base ortonormale di autovettori dell'operatore simmetrico T associato a Q (se indichiamo il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T è l'operatore dato da $Q(v) = \langle v, Tv \rangle$). Calcolare la forma bilineare simmetrica $F(v, v')$ associata a Q , verificare se è degenere e se è definita positiva. Verificare che la restrizione di F ad un opportuno autospazio di T è un prodotto scalare definito positivo.

2. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale sia fissato un riferimento carte-

siano ortogonale $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e sia data la quadrica di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz + 4yz - 9 = 0$$

Determinare l'equazione del piano tangente nel punto $P_0 = (0, 0, 3)$. Calcolare la distanza di tale piano dall'origine del riferimento. Determinare un riferimento ortonormale nel quale la quadrica abbia equazione canonica. Riconoscere il tipo di quadrica e che è di rotazione. Determinare i piani dello spazio che intersecano la quadrica secondo circonferenze di raggio 3.

(B)

1. Una macchina produce barre di tipo rettangolare, di dimensioni nominali a (larghezza) e b (lunghezza). Con riferimento ad ogni singola barra prodotta, la probabilità che la larghezza rientri nei limiti di tolleranza è pari a 0.95, per la lunghezza tale probabilità è pari a 0.90, mentre la probabilità che la larghezza e la lunghezza rientrino entrambe nei limiti di tolleranza è pari a 0.80. Calcolare, per una data barra, la probabilità che solo una delle due grandezze rientri nei limiti di tolleranza.

2. In una sequenza di n misurazioni gli errori di arrotondamento sono costituiti da n numeri aleatori X_1, \dots, X_n , stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Determinare la previsione e la varianza del numero aleatorio $Y = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Assumendo inoltre n "abbastanza grande", calcolare in modo approssimato il valore di a tale che $P(-a \leq Y \leq a) = 0.95$.

(C)

1. Determinare le funzioni non negative $y(x)$ definite in un intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$ tali che l'area della superficie ottenuta ruotando di un angolo 2π il grafico di y in $[0, x]$ intorno all'asse x sia uguale a πx . Qual è l'unica soluzione definita in tutto $[0, +\infty)$?

2. Trovare tutte le soluzioni del seguente problema

$$\begin{cases} y'' + 5y = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

con λ parametro reale.

(D)

1. Un disco rigido omogeneo pesante di raggio R e massa M è vincolato a muoversi in un piano verticale Oxy rimanendo in contatto con la retta orizzontale x . Sul disco agisce, oltre al peso, una forza orizzontale costante

$$\vec{f} = \frac{Mg}{4} \vec{e}_1$$

applicata al centro G del disco. L'atto di moto iniziale è nullo. I coefficienti di attrito statico e dinamico valgono entrambi 0.3. Verificare la possibilità di moti di puro rotolamento.

2. Un fluido incompressibile scorre intorno ad un cilindro circolare di raggio a . La velocità del fluido a distanza infinita dal corpo è V .

Assumendo il moto a potenziale ricavare il valore massimo della velocità del fluido nel campo.

Nel caso in cui il cilindro si muova ed il fluido sia in quiete, indicare come varia la velocità del fluido in funzione della distanza radiale misurata rispetto al centro del cilindro.

(E)

1. Applicare il metodo di Eulero-Cauchy al problema

$$y'(x) = -xy^2(x); \quad y(0) = 2,$$

per $x \in [0, 1]$, con i passi $h = 0.5$, $h = 0.2$, $h = 0.1$. A quale valore convergono le approssimazioni corrispondenti a $x = 1$?

2. Applicare il metodo dei coefficienti indeterminati per ricavare la formula di Cavalieri-Simpson esatta per polinomi fino al terzo grado, a partire dalla seguente formula generica di integrazione numerica:

$$\int_{-h}^h f(x)dx \cong h(\alpha f(-h) + \beta f(0) + \gamma f(h)).$$

7

**DOTTORATO DI RICERCA
MODELLI E METODI MATEMATICI
PER LA TECNOLOGIA E LA SOCIETÀ
Esame di Ammissione XVII ciclo
Prova Scritta: 19 ottobre 2001**

Compito N. 3

Il candidato svolga **uno solo** dei seguenti temi:

(A) Enunciare il Teorema di Cayley-Hamilton e indicare le linee essenziali della dimostrazione

(B) Enunciare le proprietà principali della distribuzione normale, illustrando l'importanza del suo ruolo nel campo della probabilità e dell'inferenza statistica.

(C) Presentare la teoria delle serie di potenze e illustrarne alcune applicazioni interessanti.

(D) Formulazione lagrangiana della dinamica dei sistemi olonomi.

(E) Numerosi sono i modelli matematici basati su equazioni alle derivate parziali. Partendo dalla generica equazione a coefficienti costanti

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y),$$

descrivere i concetti che sono alla base dei metodi numerici alle differenze divise.

Successivamente il candidato risolva **almeno tre** dei seguenti esercizi, scelti in **tre aree diverse** fra le cinque (A), (B), (C), (D), (E).

(A)

1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $\phi : V \rightarrow V$ un operatore unitario, cioè tale che

$$\langle \phi(v), \phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

per ogni $v, w \in V$. Dimostrare:

- (1) ϕ è invertibile e ϕ^{-1} è unitario
- (2) ϕ è unitario se e solo se la matrice di ϕ rispetto ad una base ortonormale qualsiasi di V è ortogonale.
- (3) $\det \phi = \pm 1$
- (4) Se $\dim V$ è dispari allora esiste un autovalore di ϕ di modulo 1.

2. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e sia data la quadrica di equazione

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy - 4xz - 4yz = 1$$

Trovare la matrice del cambiamento di coordinate necessario per ridurre la quadrica data nella sua forma canonica. Scrivere tale forma canonica. Riconoscere che si tratta di un cilindro iperbolico e disegnarlo.

(B)

1. Dati 3 eventi A_1, A_2, A_3 , a due a due incompatibili, con $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3$, $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \neq \Omega$, determinare i costituenti (o casi possibili) e stabilire la condizione che dev'essere soddisfatta dalla assegnazione di probabilità $P(A_i) = p_i$, con $p_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, affinché tale valutazione probabilistica sia ammissibile (cioè coerente). Verificare, inoltre, se gli eventi $E = A_1 \vee A_2$, $H = A_2 \vee A_3$ sono: a) logicamente indipendenti; b) stocasticamente indipendenti, sotto la condizione $p_1 = p_2 = p_3 = p$, con $p \in (0, \frac{1}{3})$.

2. Un apparato S è formato da 3 dispositivi in parallelo, D_1, D_2, D_3 , che entrano in funzione simultaneamente nell'istante zero. I tempi di funzionamento dei dispositivi sono tre numeri aleatori T_1, T_2, T_3 , stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Calcolare la previsione μ del tempo aleatorio X di funzionamento di S .

(C)

1. Studiare il comportamento della successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 7}{2} - \frac{1}{3^n} \end{cases}$$

Determinare inoltre il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_n - 7)$$

2. Considerare il seguente problema:

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(x^5 y) \\ y(0) = a, a > 0. \end{cases}$$

Senza risolvere l'equazione, discutere l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo. Dire se la soluzione è definita su tutto \mathbf{R} e se può assumere valori negativi o nulli.

(D)

1. Un elemento pesante di massa m è vincolato senza attrito ad una guida circolare di raggio R che ruota attorno al suo diametro AB disposto verticalmente con velocità angolare costante $\vec{\omega}$. Sull'elemento agisce, oltre al peso, una forza

elastica $\vec{f} = -k\overrightarrow{BP}$ con centro nel punto più alto della circonferenza. Determinare le posizioni di equilibrio relativo e studiarne la stabilità al variare della costante elastica k .

2. Un piano verticale Oxy ruota con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ attorno all'asse verticale y . In tale piano sono vincolate senza attrito due sbarre rigide omogenee pesanti OA e AB di uguale massa m e uguale lunghezza l , incernierate in A e in O con cerniere cilindriche ad asse orizzontale. L'estremo B della sbarra AB è vincolato a scorrere sull'asse x . Sul sistema agisce, oltre al peso, una forza elastica $\vec{f} = -k\overrightarrow{OB}$ applicata al punto B . Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che la sbarra OA forma con l'asse x e supponendo che i parametri strutturali verifichino la relazione

$$\frac{4}{3}\omega^2 - \frac{2k}{m} = \frac{g}{l},$$

determinare le posizioni di equilibrio, studiarne la stabilità e analizzare le piccole oscillazioni attorno ad una eventuale posizione di equilibrio stabile.

(E)

1. L'equazione di Keplero

$$m = x - E \sin x,$$

con m anomalia media di un pianeta, x anomalia eccentrica, E eccentricità della sua orbita, ha soluzione analitica espressa da una serie. Si approssimi invece numericamente tale soluzione con un metodo iterativo assumendo $m = 0.8$, $E = 0.2$.

2. Data la seguente formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong af(x_1) + bf(x_2), \quad x_1 \neq x_2,$$

posto $x_1 = 0$ è possibile determinare a e b in modo tale che la formula abbia grado di precisione 2? Quale scelta di x_1 e x_2 dà luogo ad una formula con grado di precisione ≥ 2 ?