Micol AMAR

SEMICONTINUITÀ E RILASSAMENTO

APPUNTI PER IL CORSO DI DOTTORATO
A.A. 2003/2004

DOTTORATO DI MODELLI E METODI MATEMATICI
PER LA TECNOLOGIA E LA SOCIETÀ

INDICE

PREFAZIONE

Questo quaderno raccoglie gli appunti utilizzati per le lezioni di un corso di 20/25 ore, dal titolo “Semicontinuità e Rilassamento”, svoltosi nell’a.a. 2003/2004, nell’ambito del Dottorato di Modelli e Metodi Matematici per la Tecnologia e la Società, presso il Dipartimento Me.Mo.Mat. della Facoltà di Ingegneria dell’Università “La Sapienza” di Roma.

Nell’intento dell’autore, esso vorrebbe rappresentare un primo approccio allo studio dei problemi di minimo tramite i Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni, senza alcuna pretesa di essere esaustivo sull’argomento, peraltro molto vasto e in continua espansione. Questi appunti dovrebbero fornire agli studenti una panoramica di alcuni dei principali risultati attualmente noti in tale ambito e costituire strumento essenziale per ulteriori approfondimenti, per i quali si consiglia di fare riferimento alla bibliografia riportata in fondo al quaderno.

Questo quaderno è suddiviso in tre capitoli: nel Capitolo 1 vengono richiamate, molto sommariamente, alcune nozioni di analisi funzionale (spazi di Sobolev, convergenza debole, teoremi di immersione) preliminari ed indispensabili alla comprensione del corso stesso; nel Capitolo 2 vengono introdotti ed analizzati i principali temi dell’analisi convessa (definizioni e proprietà delle funzioni semicontinue inferiormente e convesse, trasformata di Legendre o funzione polare, sottodifferenziale, differenziabilità secondo Gâteaux e Fréchet); infine nell’ultimo capitolo si introducono i Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni per lo studio dei problemi di minimo (definizione di coercività, teorema di esistenza di un punto di minimo, applicazioni ai funzionali integrali, rilassamento).

Settembre 2004

Micol Amar

NOTAZIONI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$	insieme dei numeri interi relativi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$	insieme dei numeri reali negativi
$\overline{\mathbb{R}}$	retta reale estesa: $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\emptyset$	insieme vuoto
$\overline{E}$	chiusura (sequenziale) dell'insieme E
∂E	frontiera dell'insieme E
$\|E\|$	misura di Lebesgue dell'insieme misurabile E
$\|\cdot\|$	norma o modulo di un vettore in $\mathbb{R}^N$
$\\|\cdot\\|_X$	norma di un vettore nello spazio normato X
$B_r(x)$	palla di raggio $r > 0$ e centro x
$\mathcal{C}(\Omega)$	spazio delle funzioni continue sull'aperto Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	spazio delle funzioni continue con supporto compatto contenuto in Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega),\ k \in \mathbb{N},$	spazio delle funzioni k-volte derivabili in Ω, con derivate continue fino all'ordine k
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	$\mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\Omega)$
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\Omega)$
$L^p(\Omega),\ 1 \le p \le +\infty,$	spazio delle funzioni p-sommabili
$W^{1,p}(\Omega),\ 1 \le p \le +\infty,$	spazio di Sobolev delle funzioni derivabili in senso debole, con derivata p-sommabile
$W_0^{1,p}(\Omega),\ 1 \le p < +\infty,$	chiusura di $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	
$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$	

CAPITOLO 1

Richiami di analisi funzionale

1.1 Spazi topologici, metrici e normati.

DEFINIZIONE 1.1. Sia X un insieme non vuoto. Si chiama *topologia* su X un famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:
(i) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$;
(ii) se I è un insieme di indici (finito o non) e $A_i \in \mathcal{T}$ per ogni $i \in I$, allora $\cup A_i \in \mathcal{T}$;
(iii) se I è un insieme di indici finito e $A_i \in \mathcal{T}$ per ogni $i \in I$, allora $\cap A_i \in \mathcal{T}$.

La coppia $(X, \mathcal{T})$ si chiama *spazio topologico*. Gli elementi di $\mathcal{T}$ sono detti *insiemi aperti*. Un insieme $C \subset X$ è detto *chiuso* se il suo complementare C^c è un aperto, cioè se $C^c \in \mathcal{T}$.

ESEMPIO 1.2. Sia $X = \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}, \emptyset, (a,b) \text{ con } a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b\}$. Allora $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1.3. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti nello spazio topologico $(X, \mathcal{T})$. Diremo che tale successione è *convergente* ad un punto $x_0 \in X$ (e scriveremo $x_n \to x_0$) se per ogni sottoinsieme aperto A di X contenente x_0, esiste un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n \geq n_0$.

Ricordiamo che in uno spazio topologico astratto, il limite di una successione convergente può non essere unico.

DEFINIZIONE 1.4. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dirà *continua* su X se la controimmagine di un qualunque intervallo aperto (a, b) di numeri reali è un aperto in X, cioè se $f^{-1}\big((a,b)\big) \in \mathcal{T}$, per ogni $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

La funzione f si dirà *sequenzialmente continua* su X, se per ogni punto $x \in X$ e per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$, tale che $x_n \to x$, si ha
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x) \ .$$

DEFINIZIONE 1.5. Un insieme $C \subset X$ è detto *sequenzialmente chiuso* se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq C$, convergente ad un punto $x \in X$, si ha che $x \in C$.

DEFINIZIONE 1.6. Un insieme $K \subseteq X$ si dice *compatto* (secondo Heine-Borel-Lebesgue) se per ogni famiglia di insiemi aperti A_i, $i \in I$ tali che
$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$
è possibile estrarre una sottofamiglia finita di indici I' tali che
$$K \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i \ .$$
In tal caso, diremo anche che K è (H-B-L) compatto.

Un insieme K si dice *sequenzialmente compatto* se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq K$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto $x \in K$.

Osserviamo che, mentre la chiusura (in senso topologico) di un insieme C o la continuità (in senso topologico) di una funzione f, implicano la medesima proprietà sequenziale (che quindi è generalmente più debole di quella topologica), in generale le due definizioni di compattezza sono indipendenti fra loro. Naturalmente la situazione si semplifica notevolmente nel caso degli spazi metrici, in cui le nozioni topologiche coincidono con quelle sequenziali.

DEFINIZIONE 1.7. Sia X un insieme non vuoto. Definiamo su $X \times X$ una *distanza*, cioè un funzionale $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che
(i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$;
(ii) (*Proprietà di annullamento*) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(iii) (*Proprietà di simmetria*) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;
(iv) (*Disuguaglianza triangolare*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.
La coppia (X, d) si chiama *spazio metrico*.

Sia $x_0 \in X$ ed $r > 0$, chiameremo *palla aperta* di raggio r e centro x_0 l'insieme

$$B_r(x_0) = \{x \in X \ : \ d(x, x_0) < r\} \ .$$

ESEMPIO 1.8. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X con la seguente proprietà: $A \in \mathcal{T}$ se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che la palla di centro x e raggio r è interamente contenuta in A. Si verifica facilmente che $\mathcal{T}$ è una topologia su X e si dice che $\mathcal{T}$ è la topologia indotta su X dalla metrica.

DEFINIZIONE 1.9. Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di punti di X. Sia $x_0 \in X$; diremo che tale successione *converge* a x_0 per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n \to x_0$) se $d(x_n, x_0) \to 0$ per $n \to +\infty$.

In uno spazio metrico, ogni insieme è chiuso se e solo se è sequenzialmente chiuso; ogni funzione è continua se e solo se è sequenzialmente continua; ogni insieme è (H-B-L) compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.

DEFINIZIONE 1.10. Sia X uno spazio vettoriale. Definiamo su X una *norma*, cioè un funzionale $\| \cdot \|_X : X \to \mathbb{R}$ tale che
(i) $\|x\|_X \geq 0$ per ogni $x \in X$;
(ii) (*Proprietà di annullamento*) $\|x\|_X = 0 \iff x = 0$;
(iii) (*Positiva omogeneità*) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \ \|x\|_X$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
(iv) (*Disuguaglianza triangolare*) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ per ogni $x, y \in X$.
La coppia $(X, \| \cdot \|_X)$ (o più semplicemente X, qualora $\| \cdot \|_X$ sia assegnata) si chiama *spazio normato*.

Uno spazio normato è metrico rispetto alla distanza indotta dalla norma, cioè $d(x, y) = \|x - y\|_X$, pertanto ogni spazio normato è, in particolare, uno spazio topologico.

OSSERVAZIONE 1.11. Osserviamo che in uno spazio normato (e quindi topologico), l'unione di una famiglia qualsiasi di insiemi aperti e l'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è ancora un insieme aperto; conseguentemente, l'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi chiusi e l'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.

DEFINIZIONE 1.12. Sia X uno spazio normato e $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di punti di X. Sia $x_0 \in X$; diremo che $\{x_n\}$ converge ad x_0 per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n \to x_0$), se $\|x_n - x_0\|_X \to 0$, per $n \to +\infty$. Questa convergenza sarà anche detta *convergenza forte*.

Diremo che $\{x_n\}$ è una *successione di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0 \ .$$

Osserviamo che ogni successione convergente è di Cauchy, mentre, in generale, non vale il viceversa.

DEFINIZIONE 1.13. Diremo che X è uno *spazio normato completo* se ogni successione di Cauchy è convergente in X. In tal caso X è detto *spazio di Banach*.

1.3 Convergenza debole in spazi normati.

Sia X uno spazio di Banach (di dimensione finita o infinita). Indicheremo con X^* lo spazio duale di X, cioè lo spazio di Banach di tutti i funzionali lineari e continui su X, e con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità canonica tra X e X^*. Per ogni funzionale $x^* \in X^*$, $\|x^*\|_{X^*}$ denota la norma duale di tale vettore nello spazio X^*, cioè

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} |\langle x^*, x \rangle| \ .$$

Infine indicheremo con X^{**} lo spazio biduale di X (cioè lo spazio duale di X^*). È ben noto che X può essere identificato con un sottospazio di X^{**}. Diremo che X è riflessivo se X coincide con il suo spazio biduale X^{**}.

Ovviamente, utilizzando la norma definita su X^*, possiamo introdurre su tale spazio, come già fatto per X, una nozione di convergenza forte. Infatti, diremo che la successione $\{x_n^*\} \subseteq X^*$ converge ad $x^* \in X^*$ fortemente per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n^* \to x^*$), se $\|x_n^* - x^*\|_{X^*} \to 0$, per $n \to +\infty$.

DEFINIZIONE 1.14. Sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in X. Diremo che x_n converge ad $x \in X$ *debolmente* per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n \rightharpoonup x$), se $\langle x^*, x_n \rangle \to \langle x^*, x \rangle$, per $n \to +\infty$ e per ogni $x^* \in X^*$.

Sia $\{x_n^*\}$ è una successione contenuta in X^*. Diremo che x_n^* converge ad $x^* \in X^*$ $*$-*debolmente* per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$), se $\langle x_n^*, x \rangle \to \langle x^*, x \rangle$, per $n \to +\infty$ e per ogni $x \in X$.

Ricordiamo che la topologia debole su X (cioè la topologia che induce la nozione di convergenza sopra richiamata) è la topologia meno fine rispetto alla quale gli elementi di X^* sono ancora dei funzionali continui su X. Negli spazi infinito dimensionali, la topologia debole è strettamente meno fine della topologia forte (cioè quella indotta dalla norma): ad esempio il bordo della sfera unitaria è fortemente, ma non debolmente, chiuso (vedi [3, Cap. III, Esempio 1]). Le due topologie coincidono, invece, negli spazi finito dimensionali.

È ben noto che, nel caso della topologia forte, poiché come abbiamo ricordato essa è metrizzabile, le proprietà topologiche coincidono con quelle sequenziali; viceversa, nel caso della topologia debole (e se X ha dimensione infinita), ciò non è più vero, in quanto la topologia debole non è metrizzabile e, pertanto, essa non può essere caratterizzata tramite le successioni debolmente convergenti.

Ricordiamo anche che, sebbene la topologia debole non sia metrizzabile, essa lo diventa sulla sfera unitaria, se X^* è separabile; ovvero la topologia debole è metrizzabile su ogni insieme limitato di X, quando il suo duale è separabile. Analogamente, se X è separabile, la topologia $*$-debole è metrizzabile su ogni insieme limitato di X^*.

Il seguente risultato è diretta conseguenza del ben noto Teorema di Banach-Steinhaus.

TEOREMA 1.15.

Sia X uno spazio di Banach. Siano $x_n, x \in X$. Supponiamo che $x_n \rightharpoonup x$, allora esiste un numero reale $c > 0$ tale che $\|x_n\| \leq c$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Siano $x_n^*, x^* \in X^*$. Supponiamo che $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$, allora esiste un numero reale $c > 0$ tale che $\|x_n^*\|_{X^*} \leq c$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Vediamo ora che relazioni intercorrono tra la convergenza forte e quella debole o $*$-debole.

TEOREMA 1.16.

Sia X uno spazio di Banach. Siano $x_n, x \in X$ e $x_n^*, x^* \in X^*$.

(i) Se $x_n \to x$ (fortemente), allora $x_n \rightharpoonup x$ (debolmente).

(ii) Se $x_n^* \to x^*$ (fortemente), allora $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ ($*$-debolmente).

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, allora $\|x\|_X \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|_X$.

(iv) Se $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$, allora $\|x^*\|_{X^*} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n^*\|_{X^*}$.

TEOREMA 1.17.

Sia X uno spazio di Banach. Assumiamo che $\{x_n\}$ sia una successione debolmente convergente ad x in X e che $\{x_n^*\}$ sia una successione fortemente convergente ad x^* in X^*. Allora $\langle x_n^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$.

Analogamente, assumiamo che $\{x_n\}$ sia una successione fortemente convergente ad x in X e che $\{x_n^*\}$ sia una successione $*$-debolmente convergente ad x^* in X^*. Allora $\langle x_n^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$.

ESERCIZIO: Dimostrare il precedente teorema.

Osserviamo che, se X è uno spazio di Banach riflessivo di dimensione infinita, è sempre possibile trovare delle successioni debolmente convergenti che non convergono in senso forte (vedi Teorema 1.32 e le successive considerazioni). D'altra parte, esistono degli esempi, anche se rari, di spazi di dimensione infinita "patologici" (per esempio lo spazio l^1), in cui tutte le successioni debolmente convergenti sono anche fortemente convergenti. Ciò non toglie che, comunque, anche su tali spazi anomali, le due topologie non coincidono, in quanto, come già detto, la topologia debole, non essendo metrizzabile, non può essere caratterizzata dalle successioni convergenti, come invece lo è la topologia forte.

Passiamo ora ad analizzare la compattezza nella topologia debole. È ben noto che in dimensione infinita, la sfera unitaria non è mai compatta rispetto alla topologia forte, anzi questa è proprio una caratterizzazione degli spazi finito dimensionali (vedi [3, Teorema VI.5]). Come segue dai prossimi teoremi, invece, la compattezza della sfera unitaria si recupera nella topologia debole.

TEOREMA 1.18.

Sia X uno spazio di Banach. Allora la sfera unitaria $B_1(0)$ di X^* è (H-B-L) compatta rispetto alla topologia $*$-debole. Se inoltre X è separabile allora la sfera unitaria di X^* è anche sequenzialmente compatta; ovvero, se $\{x_n^*\} \subseteq X^*$ ed esiste un numero reale $c > 0$ tale che $\|x_n^*\|_{X^*} \leq c$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_j}^*\}$ di $\{x_n^*\}$ ed un punto $x^* \in X^*$ tale che $x_{n_j}^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$, per $j \to +\infty$.

Un analogo risultato vale nello spazio X.

TEOREMA 1.19.

Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ e supponiamo che esista un numero reale $c > 0$ tale che $\|x_n\|_X \leq c$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ di $\{x_n\}$ ed un vettore $x \in X$ tale che $x_{n_j} \rightharpoonup x$, per $j \to +\infty$.

Concludiamo questo primo paragrafo analizzando le relazioni esistenti tra topologia debole e forte sugli insiemi convessi.

DEFINIZIONE 1.20. Sia X uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice *convesso* se per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\alpha \in [0,1]$ si ha $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$.

TEOREMA 1.21 (Teorema di Hahn-Banach, prima versione).

Sia X uno spazio di Banach. Siano A e B due sottoinsiemi convessi, non vuoti e disgiunti di X. Supponiamo che A sia aperto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso largo, cioè esiste un numero reale α e un funzionale lineare $x^* \in X^*$ tale che

$$\langle x^*, x\rangle \leq \alpha \qquad \forall x \in A \qquad \text{e} \qquad \langle x^*, x\rangle \geq \alpha \qquad \forall x \in B\ .$$

TEOREMA 1.22 (Teorema di Hahn-Banach, seconda versione).

Sia X uno spazio di Banach. Siano A e B due sottoinsiemi convessi, non vuoti e disgiunti di X. Supponiamo che A sia chiuso e B compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso stretto, cioè esiste un numero reale α e un funzionale lineare $x^* \in X^*$ tale che

$$\sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle < \alpha \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in B}\langle x^*, x\rangle > \alpha\ ,$$

o, equivalentemente, esistono $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^* \in X^*$ ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$\langle x^*, x\rangle \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \qquad \text{e} \qquad \langle x^*, x\rangle \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B\ .$$

TEOREMA 1.23.

Sia X uno spazio di Banach. Sia $C \subseteq X$ un insieme convesso. Allora C è debolmente chiuso se e solo se esso è fortemente chiuso.

Dimostrazione. Supponiamo che C sia debolmente chiuso; allora, in particolare, esso è sequenzialmente debolmente chiuso, cioè il limite di ogni successione debolmente convergente in C appartiene a C. Poiché una successione fortemente convergente è anche debolmente convergente, si ottiene che il limite di ogni successione fortemente convergente in C appartiene a C, cioè C è sequenzialmente chiuso nella topologia forte. Ma poiché la topologia forte è metrizzabile, la chiusura sequenziale forte di C coincide con la sua chiusura topologica forte e, quindi, C è chiuso nella topologia forte.

Viceversa, assumiamo che C sia fortemente chiuso. Mostriamo che il complementare di C è debolmente aperto. Sia $x_0 \notin C$, allora, per il Teorema di Hahn-Banach (Teorema 1.22), esiste un iperpiano che separa strettamente il convesso compatto x_0 dal convesso chiuso C; cioè esistono $x^* \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\langle x^*, x_0 \rangle < \alpha < \langle x^*, x \rangle \qquad \forall x \in C \ .$$

Poniamo $V = \{y \in X \ : \ \langle x^*, y \rangle < \alpha\}$, allora V è un aperto nella topologia debole contenente x_0 (infatti $V = (x^*)^{-1}(-\infty, \alpha)$) e $V \cap C = \emptyset$, cioè $V \subset C^c$. Per l'arbitrarietà di x_0 in C^c otteniamo che C^c è debolmente aperto, ovvero C è debolmente chiuso. $\square$

OSSERVAZIONE 1.24. Poiché la chiusura topologica implica sempre quella sequenziale e, nel caso della topologia forte, le due nozioni coincidono, dal Teorema 1.23 si ricava che un insieme convesso è chiuso nella topologia forte di X se e solo se esso è sequenzialmente chiuso nella topologia debole. In particolare, ciò implica che, per un insieme convesso, l'essere chiuso o sequenzialmente chiuso sono due proprietà coincidenti, non solo nella topologia forte di X (cosa ben nota), ma anche in quella debole.

Come conseguenza del precedente risultato, si ottiene il seguente corollario.

COROLLARIO 1.25 (Lemma di Mazur).

Sia X uno spazio di Banach. Siano $x_n, x \in X$ tali che $x_n \rightharpoonup x$. Allora esiste una combinazione convessa degli elementi della successione $\{x_n\}$ che converge ad x fortemente, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_i \in [0,1]$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad \text{e} \qquad \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - x \|_X < \varepsilon \ .$$

1.4 Spazi di funzioni sommabili secondo Lebesgue e spazi di Sobolev.

Ricordiamo che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme aperto, $1 \le p < +\infty$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ è una funzione misurabile, si dice che f è p-sommabile secondo Lebesgue (e si scrive $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$) se

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty \ .$$

Analogamente, si dice che f è essenzialmente limitata (e si scrive $f \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$) se

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \ : \ |f(x)| \le \alpha \text{ q.o. in } \Omega\} < +\infty \ .$$

In particolare, diremo che $f \in L^p_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, $1 \leq p \leq +\infty$, se $f \in L^p(A;\mathbb{R}^M)$, per ogni insieme aperto $A \subset\subset \Omega$.

Gli spazi L^p dotati delle norme sopra definite sono spazi di Banach e, per $1 \leq p < +\infty$, essi sono anche separabili. Ovviamente, una successione $\{f_n\} \subseteq L^p(\Omega,\mathbb{R}^M)$ converge ad $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ in senso forte se $\|f_n - f\|_p \to 0$, per $n \to +\infty$.

Dato $1 \leq p \leq +\infty$, indichiamo con p' l'esponente coniugato di p, cioè $1/p + 1/p' = 1$ se $1 < p < +\infty$, $p' = +\infty$ se $p = 1$ e $p' = 1$ se $p = +\infty$. Se $1 \leq p < +\infty$, si ha che $L^{p'}$ è lo spazio duale di L^p, mentre L^1 è strettamente contenuto nel duale di L^∞. Inoltre, se $1 < p < +\infty$, lo spazio L^p è riflessivo.

Vediamo ora come si specializzano in questo contesto le nozioni di convergenza debole e convergenza $*$-debole. Per semplicità assumiamo $M = 1$ (e quindi scriveremo $L^p(\Omega)$ anziché $L^p(\Omega;\mathbb{R})$), in quanto il caso generale si ottiene, poi, ragionando per componenti.

Sia dapprima $1 \leq p < +\infty$, allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)\ dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\ dx \qquad \forall g \in L^{p'}(\Omega)\ .$$

Analogamente, si ha $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$ se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)\ dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\ dx \qquad \forall g \in L^1(\Omega)\ .$$

TEOREMA 1.26.

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^p(\Omega)$ fortemente convergente ad $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora

(i) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ se $1 \leq p < +\infty$ ed $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$;

(ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, per $1 \leq p \leq +\infty$.

Dimostrazione. L'implicazione (i) discende dal Teorema 1.16 e la (ii) è una semplice conseguenza della disuguglianza triangolare. $\square$

Nel caso in cui si abbia $1 < p < +\infty$, è possibile invertire il risultato del precedente teorema.

TEOREMA 1.27.

Assumiamo $1 < p < +\infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^p(\Omega)$. Suppponiamo che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ e $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Allora $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$.

TEOREMA 1.28.

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^p(\Omega)$ fortemente convergente ad $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ ed un insieme $N \subset \Omega$ di misura nulla, tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \Omega \setminus N$, ovvero la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge ad f puntualmente quasi ovunque.

TEOREMA 1.29.

(i) *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili definite su* Ω, *tali che* $f_n(x) \geq 0$, *per quasi ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$\int_\Omega [\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)] \; dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) \; dx \; .$$

(ii) *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili definite su* Ω, *tali che* $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, *per quasi ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$\int_\Omega f_n(x) \; dx \to \int_\Omega f(x) \; dx \qquad \text{dove} \qquad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \; .$$

(iii) *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili definite su* Ω *convergente puntualmente quasi ovunque ad una assegnata funzione* f. *Supponiamo che per quasi ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si abbia* $|f_n(x)| \leq g(x)$, *dove* $g \in L^1(\Omega)$. *Allora,* $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *per* $n \to +\infty$.

Dai Teoremi 1.15, 1.18 e 1.19 si ottiene immediatamente il seguente risultato.

TEOREMA 1.30.

Assumiamo che $\{f_n\}$ *sia una successione debolmente convergente in* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *(rispettivamente,* $*$*-debolmente convergente in* $L^\infty(\Omega)$*). Allora essa è equilimitata.*

Assumiamo che $\{f_n\}$ *sia una successione equilimitata in* $L^p(\Omega)$, $1 < p \leq +\infty$. *Allora esiste una funzione* $f \in L^p(\Omega)$ *ed una sottosuccessione di* $\{f_n\}$ *debolmente convergente ad* f *per* $1 < p < +\infty$ *(rispettivamente* $*$*-debolmente convergente ad* f *per* $p = +\infty$*).*

Osserviamo che per $p = 2$ lo spazio di Banach L^p è in realtà uno spazio di Hilbert, rispetto al prodotto scalare $(f, g) := \int_\Omega f(x)g(x) \; dx$. Pertanto, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz negli spazi di Hilbert, si ottiene

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x) \; dx \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega) \; ,$$

che implica, in particolare, che il prodotto di due funzioni L^2 fornisce una funzione dello spazio L^1. Questo risultato si può generalizzare al caso del prodotto di due funzioni appartenenti a due spazi di Lebesgue fra loro in dualità, come segue dal prossimo teorema.

TEOREMA 1.31 (Disuguaglianza di Hölder).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto, sia* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* p' *l'esponente coniugato di* p. *Allora per ogni* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^{p'}(\Omega)$, *si ha che* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x) \; dx \right| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'} \; .$$

ESERCIZIO: Come conseguenza della disuguaglianza di Holder, dimostrare che, se $p, q, r \in (1, +\infty)$ e $1/p + 1/q = 1/r$, allora $fg \in L^r(\Omega)$ per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ e che

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \; .$$

ESERCIZIO: Dimostrare che, se Ω è un insieme aperto e limitato ed $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq +\infty$, allora $f \in L^q(\Omega)$, per ogni $1 \leq q < p$, e

$$\|f\|_q \leq |\Omega|^{(p-q)/pq} \|f\|_p \ ,$$

con la convenzione che $(p-q)/pq$ vale $1/q$ se $p = +\infty$.

Stabiliamo ora un utile risultato riguardante la convergenza debole di funzioni periodiche. Assumiamo per semplicità che f sia una funzione $(0,1)^N$-periodica, anche se il risultato vale per funzioni periodiche generali, pur di interpretare $\overline{f}$ come il valor medio della funzione f sul periodo.

TEOREMA 1.32.

Sia $Y = (0,1)^N$ e sia $f \in L^p(Y)$, $1 \leq p \leq +\infty$, estesa per periodicità su tutto $\mathbb{R}^N$. Sia $f_\varepsilon(x) = f(x/\varepsilon)$; allora, per $\varepsilon \to 0^+$, si ha

$$f_\varepsilon \rightharpoonup \overline{f} := \int_Y f(x)\ dx \qquad \text{se } 1 \leq p < +\infty \ ;$$
$$f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} := \int_Y f(x)\ dx \qquad \text{se } p = +\infty \ .$$

Nel caso in cui $f(x) = \sin x$, si ottiene che $\sin(x/\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(0, 2\pi)$, risultato noto come Lemma di Riemann-Lebesgue. Esso implica, in particolare, che la successione $\{\sin(nx)\}$ rappresenta un esempio di successione debolmente, ma ovviamente non fortemente, convergente.

ESERCIZIO: Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in (0, 1/2] \ ; \\ \beta & \text{se } x \in (1/2, 1) \ : \end{cases} \qquad \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha \neq \beta \ .$$

Dopo aver esteso f per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, calcolare il limite debole ($*$-debole) di $f_n(x) := f(nx)$ in $L^p(0,1)$ per $1 \leq p < +\infty$ (per $p = +\infty$). Dimostrare che la successione $\{f_n\}$ non converge fortemente.

ESERCIZIO: Assumiamo che $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione limitata tale che

1) $f(\cdot, s)$ è continua e $(0,1)$-periodica, per ogni $s \in \mathbb{R}$;
2) $|f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leq |s_1 - s_2|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Dimostrare che

$$f(nx, u) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f}(u) \qquad *\text{-debolmente in } L^\infty(\mathbb{R})$$

per ogni $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, dove

$$\overline{f}(s) = \int_0^1 f(y, s)\ dy \ .$$

(Hint.: Approssimare u con funzioni semplici)

ESERCIZIO: Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come nel precedente esercizio. Dimostrare che

$$f(nx, u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f}(u) \qquad *\text{-debolmente in } L^\infty(\mathbb{R})$$

per ogni successione $\{u_n\} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ fortemente convergente ad $u \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Richiamiamo ora un'importante e ben nota proprietà di annullamento delle funzioni sommabili.

LEMMA 1.33.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto ed* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Assumiamo che*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\ dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)\ .$$

Allora $f = 0$ *quasi ovunque in* Ω.

COROLLARIO 1.34.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto ed* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Assumiamo che*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\ dx = 0 \tag{1.1}$$

per tutte le funzioni $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ *tali che* $⨍_\Omega \phi\ dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi\ dx = 0$. *Allora esiste una costante* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $f = c$ *quasi ovunque in* Ω.

Dimostrazione. Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ e $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ con $⨍_\Omega \Psi\ dx = 1$. Allora

$$\int_\Omega [f - ⨍_\Omega f\Psi\ dy]\psi\ dx = \int_\Omega f\psi\ dx - \left(⨍_\Omega f\Psi\ dy\right)\left(\int_\Omega \psi\ dx\right) = \int_\Omega f[\psi - \Psi ⨍_\Omega \psi\ dy]\ dx = 0$$

poiché, posta $\phi = \psi - \Psi ⨍_\Omega \psi\ dy$ si ha che $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ e $⨍_\Omega \phi\ dx = 0$. Pertanto, dal Lemma 1.33 si ottiene $f - ⨍_\Omega f\Psi\ dy = 0$ quasi ovunque in Ω, cioè la tesi vale con $c = ⨍_\Omega f\Psi\ dy$. □

Concludiamo quindi il capitolo richiamando le proprietà principali delle funzioni che ammettono derivate in senso debole. Innanzitutto, dato $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$, denotiamo con $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ lo spazio delle funzioni misurabili che ammettono k-derivate nel senso delle distribuzioni p-sommabili secondo Lebesgue. Tale spazio è di Banach se dotato della norma

$$\|f\|_{k,p} := \left(\sum_{\alpha=0}^k \|\nabla^\alpha f\|_p^p\right)^{1/p} \qquad \text{se } 1 \leq p < +\infty\ ;$$
$$\|f\|_{k,\infty} := \max_{0\leq\alpha\leq k} \|\nabla^\alpha f\|_\infty \qquad \text{se } p = +\infty\ ;$$

dove $\nabla^\alpha f$ indica la matrice delle derivate α-esime di f nel senso delle distribuzioni (e $\nabla^0 f \equiv f$).
Come di consueto, indicheremo con $H^k(\Omega;\mathbb{R}^M)$ lo spazio $W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Inoltre, per $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ denota la chiusura di $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ nella norma di $W^{k,p}$ e $H^k_0(\Omega;\mathbb{R}^M) = W^{k,2}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Lo spazio $W^{k,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma di $W^{k,p}$. Nel caso in cui $\Omega = (a,b)$ sia un intervallo reale, $W^{1,1}(a,b)$ si identifica con lo spazio delle funzioni assolutamente continue su (a,b).
Ricordiamo che, se p' è l'esponente coniugato di p, $W^{-k,p'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è lo spazio duale di $W^{k,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$; in particolare, per $k = 1$ ed $M = 1$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ è lo spazio duale di $W^{1,p}_0(\Omega)$ ed ogni elemento $\overline{g}$ di $W^{-1,p'}(\Omega)$ si può rappresentare nel modo seguente:

$$\overline{g} = g - \sum_{j=1}^N \partial_j g_j$$

dove $g, g_j \in L^{p'}(\Omega)$ e la derivata è intesa nel senso delle distribuzioni. Inoltre, se Ω è limitato, $h \leq k$ e $q < p$, allora $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset W^{h,q}(\Omega;\mathbb{R}^M)$.
Ricordiamo anche che, per $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è separabile e per $1 < p < +\infty$ è riflessivo. Infine, se Ω è regolare (ad esempio $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$) e $1 \leq p < +\infty$, si ha che $\mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, rispetto alla norma definita sopra e, se Ω è limitato, $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ si identifica con lo spazio delle funzioni Lipschitziane.

TEOREMA 1.35 (Teorema di immersione).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato. Allora

(i) Se $1 \leq p < N$, $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset L^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$, per ogni $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ e l'immersione è compatta per $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.

(ii) Se $p = N$, $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset L^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$, per ogni $1 \leq q < +\infty$ e l'immersione è compatta.

(iii) Se $p > N$, $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset \mathcal{C}_0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^M)$ e l'immersione è compatta.

Il precedente risultato continua a valere se si sostituisce $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, pur di assumere un'opportuna regolarità del bordo di Ω, ad esempio $\partial\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$.

Osserviamo che il Teorema 1.35 implica, in particolare, che, se $1 \leq p \leq +\infty$ e $f_n \rightharpoonup f$ in $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, allora $f_n \to f$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

TEOREMA 1.36 (Disuguaglianza di Poincaré).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto, connesso, limitato, con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \leq p < +\infty$. Allora,

(i) esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $f \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, si ha

$$\|f\|_p \leq c\|\nabla f\|_p \ ;$$

(ii) esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $f \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, si ha

$$\|f - \overline{f}\|_p \leq c\|\nabla f\|_p \ ,$$

dove $\overline{f} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\ dx$.

OSSERVAZIONE 1.37. Osserviamo che la proprietà (i) vale più in generale per aperti limitati qualsiasi (cioè, non necessariamente connessi e con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$), mentre la proprietà (ii) vale anche per $p = +\infty$.

Per semplicità vedremo la dimostrazione solo nel caso $p > 1$.

Dimostrazione.

(i) Assumiamo per assurdo che la tesi non valga, cioè per ogni $n > 0$ esiste $f_n \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che

$$\|f_n\|_p > n\|\nabla f_n\|_p \ . \tag{1.2}$$

Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $\|f_n\|_p = 1$; pertanto dalla (1.2) si ottiene che

$$\|f_n\|_{1,p} \leq 2 \qquad \text{e} \qquad \|\nabla f_n\|_p \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Dal Teorema 1.19 segue allora che esiste una funzione $f \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ed una sottosuccessione, che denoteremo ancora con $\{f_n\}$, tale che $f_n \rightharpoonup f$ in $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Dal Teorema 1.35 si ottiene anche che $f_n \to f$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e quindi, poiché $\|f_n\|_p = 1$, si ha che $\|f\|_p = 1$. D'altra parte, dalla (1.2) e dal Teorema 1.16, si ricava $\|\nabla f\|_p \leq \liminf \|\nabla f_n\|_p = 0$, ovvero $f = \textit{costante}$ in $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e quindi $f = 0$ quasi ovunque in Ω, in contraddizione con il fatto che $\|f\|_p = 1$.

(ii) Per dimostrare la seconda disuguaglianza, si procede in modo analogo, rimpiazzando f_n con $g_n = f_n - \overline{f}_n$. Si ottiene così che $g_n \to g$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$, con $\|g\|_p = 1$ e $g = \textit{costante}$ in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. D'altra parte, dalla convergenza forte si ottiene anche

$$0 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega [f_n(x) - \overline{f}_n]\, dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g_n(x)\, dx \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(x)\, dx$$

che implica, essendo g un vettore constante di $\mathbb{R}^M$, $g = 0$ quasi ovunque in Ω, in contraddizione con il fatto che $\|g\|_p = 1$.

□

ESERCIZIO: Siano $p = 1$ ed $N = 1$. Dimostrare la disuguaglianza di Poincaré.

Osserviamo che la disuguaglianza di Poincaré implica, in particolare, che su $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, la norma L^p del gradiente costituisce una norma equivalente alla norma di $W^{1,p}$ e quindi tale spazio dotato della norma L^p del gradiente risulta essere uno spazio di Banach.

ESERCIZIO: Sia $u \in W^{1,1}(0,1)$. Assumiamo che

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\, dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)\ .$$

Dimostrare che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $u = c$ quasi ovunque in $(0,1)$.

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati in questo capitolo, si rimanda a [1, 3].

CAPITOLO 2

Analisi convessa

Nel corso di questo capitolo, indicheremo con X un generico spazio di Banach, che, se non verrà diversamente specificato, supporremo dotato della topologia forte, cioè della topologia indotta dalla norma.

DEFINIZIONE 2.1. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che essa è *convessa* se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$

e per ogni x, y tali che $f(x), f(y) < +\infty$. Diremo che f è *strettamente convessa* se essa non è identicamente $+\infty$ e se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad \forall \alpha \in (0,1)$$

e per ogni $x \neq y$ tali che $f(x), f(y) < +\infty$.

ESERCIZIO: Sia $n \in \mathbb{N}$ ed $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dimostrare che, per ogni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$, con $\sum \alpha_i = 1$, e per ogni $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $f(x_i) < +\infty$, si ha

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \ .$$

ESERCIZIO: Sia I un insieme di indici (finito o infinito, numerabile o non). Per ogni $i \in I$, siano $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ delle funzioni convesse. Dimostrare che

$$f(x) := \sup_I f_i(x)$$

è una funzione convessa.

DEFINIZIONE 2.2. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che essa è *sequenzialmente semicontinua inferiormente* (rispett. *debolmente sequenzialmente semicontinua inferiormente*), se, per ogni $x \in X$,

$$f(x) \leq \liminf_{x_n \to x} f(x_n) \qquad \forall x_n \to x \text{ in } X \qquad (\text{rispett. } \forall x_n \rightharpoonup x \text{ in } X).$$

In tal caso, scriveremo per semplicità f s.c.i. (rispett. debolmente s.c.i.).

Nel caso in cui su X si consideri la topologia forte, la definizione data coincide con la definizione topologica di semicontinuità inferiore (cfr., per esempio, [8, Cap. I]).

OSSERVAZIONE 2.3. Osserviamo che, se f è convessa ed assume valore $-\infty$ in un estremo di un segmento, essa è finita al più in un punto di tale segmento; quindi se $x_0 \in X$, f è superiormente limitata in un intorno di x_0 e $f(x_0) = -\infty$, allora essa sarà identicamente uguale a $-\infty$ in tutto l'intorno considerato. Se f è convessa e s.c.i. ed assume valore $-\infty$ in un punto, allora essa non è mai finita.

A seguito dell'osservazione precedente, ci limiteremo a considerare solo funzioni che non assumano mai il valore $-\infty$. Ricordiamo che una funzione f è detta *propria* se $f(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$ e se esiste almeno un punto $\overline{x} \in X$ tale che $f(\overline{x}) < +\infty$; ovvero, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, non identicamente uguale a $+\infty$.

Definiamo *dominio* di f l'insieme

$$dom(f) = \{x \in X \;:\; f(x) < +\infty\} \ .$$

Se f è convessa, il suo dominio risulta essere un insieme convesso. Inoltre, se f è propria, il suo dominio coincide con l'insieme dei punti in cui f è finita.
Infine, si chiama *epigrafico* di f l'insieme

$$epi(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \;:\; t \geq f(x)\} \ .$$

TEOREMA 2.4.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione propria. Allora essa è convessa se e solo se il suo epigrafico è convesso.

Dimostrazione. Siano $(x,t),(y,s) \in epi(f)$. Consideriamo il punto $(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha t + (1-\alpha)s)$ con $\alpha \in [0,1]$.

Se f è convessa otteniamo

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leq \alpha t + (1-\alpha)s \ ,$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che, per ipotesi, $(x,t),(y,s) \in epi(f)$. Pertanto, $(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha t + (1-\alpha)s) \in epi(f)$ e quindi $epi(f)$ risulta essere convesso.

Supponiamo invece che $epi(f)$ sia convesso. Allora $(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha t + (1-\alpha)s) \in epi(f)$, per ogni $\alpha \in [0,1]$, cioè

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha t + (1-\alpha)s \ , \tag{2.1}$$

qualunque siano i punti $(x,t),(y,s) \in epi(f)$. Scegliendo, in particolare, $t = f(x)$ ed $s = f(y)$, dalla (2.1) si ricava subito la convessità di f. □

TEOREMA 2.5.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione propria. Allora essa è s.c.i. (rispett. debolmente s.c.i.) se e solo se il suo epigrafico è chiuso (rispett. debolmente sequenzialmente chiuso).

Dimostrazione. Innanzitutto sottolineiamo il fatto che, nella dimostrazione del teorema, $\overline{epi}(f)$ denoterà la chiusura sequenziale e non topologica dell'epigrafico (ricordiamo che le due nozioni coincidono nella topologia forte, ma non in quella debole).

Assumiamo che f sia s.c.i. e che (x,t) sia un punto di $\overline{epi}(f)$. Sia quindi $\{(x_n,t_n)\} \subset epi(f)$ una successione convergente nella topologia considerata ad (x,t), per $n \to +\infty$. Per le ipotesi fatte avremo

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} t_n = t \ ,$$

ovvero $(x,t) \in epi(f)$.

Viceversa, assumiamo che $epi(f)$ sia sequenzialmente chiuso nella topologia considerata, cioè $epi(f) = \overline{epi}(f)$. Sia inoltre $\{x_n\}$ una successione convergente ad x, per $n \to +\infty$, nella topologia considerata, con $\liminf f(x_n) < +\infty$, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo assumere che lim inf sia in realtà un limite, che indicheremo con l. Consideriamo allora la successione $\{(x_n, f(x_n))\} \in epi(f)$ che converge al punto (x,l); poiché $epi(f)$ è sequenzialmente chiuso, si ha che $(x,l) \in epi(f)$, cioè $l \in \mathbb{R}$ e $f(x) \leq l$, ovvero

$$f(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \ .$$

□

TEOREMA 2.6.

Sia I un insieme di indici (finito o non finito). Siano $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, delle funzioni proprie e s.c.i. su X. Allora la funzione

$$f(x) = \sup_I f_i(x)$$

è s.c.i. su X.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza immediata del fatto che

$$epi(f) = \bigcap_{i\in I} epi(f_i)$$

e l'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso (vedi Osservazione 1.11). □

TEOREMA 2.7.

Sia I un insieme di indici finito. Siano $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, delle funzioni proprie e s.c.i. su X. Allora la funzione

$$f(x) = \inf_I f_i(x)$$

è s.c.i. su X.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza immediata del fatto che

$$epi(f) = \bigcup_{i\in I} epi(f_i)$$

e l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso (vedi Osservazione 1.11).
□

TEOREMA 2.8.

Siano $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, *due funzioni proprie e s.c.i. su* X. *Allora la funzione* $f_1 + f_2$ *è s.c.i. su* X.

Dimostrazione. Siano $x \in X$ e $\{x_n\} \subseteq X$ una successione convergente ad x. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty}(f_1+f_2)(x_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} f_1(x_n) + \liminf_{n\to+\infty} f_2(x_n) \geq f_1(x) + f_2(x) \ ,$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta all'ipotesi di s.c.i. di f_1 ed f_2. $\square$

Vogliamo ora occuparci della regolarità delle funzioni convesse.

TEOREMA 2.9.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione convessa e propria. Assumiamo che* $x_0 \in X$ *e che* f *sia superiormente limitata in un intorno di* x_0. *Allora* f *è continua in* x_0.

Dimostrazione. A meno di sostituire alla funzione f la funzione $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$, che è ancora convessa e propria, possiamo supporre $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$. Quindi, per ipotesi, esiste un numero reale $M > 0$ e un intorno $U(0)$ dell'origine (che possiamo supporre simmetrico) tali che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in U(0)$. Sia ora $\alpha \in [0, 1]$ e $x \in X$ tale che $x/\alpha \in U(0)$. Allora

$$f(x) = f\left(\alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0\right) \leq \alpha f(x/\alpha) + (1-\alpha)f(0) = \alpha f(x/\alpha) \leq \alpha M \ .$$

Analogamente, poiché $-x/\alpha \in U(0)$, otteniamo

$$0 = f(0) = f\left(\frac{1}{\alpha+1}x + \frac{\alpha}{\alpha+1}(-x/\alpha)\right) \leq \frac{1}{\alpha+1}f(x) + \frac{\alpha}{\alpha+1}f(-x/\alpha) \leq f(x) + \alpha M \ .$$

Dalle due disuguaglianze precedenti si ricava infine $|f(x)| \leq \alpha M$, per ogni $\alpha \in [0, 1]$ e per ogni $x \in X$ tale che $x/\alpha \in U(0)$, cioè $x \in \alpha U(0)$. Quindi $f(x) \to 0$ per $x \to 0$. $\square$

OSSERVAZIONE 2.10. Osserviamo che, se su X si considera la topologia debole, anziché la topologia forte (cioè quella indotta dalla norma), i Teoremi 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9 continuano a valere.

TEOREMA 2.11.

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa, allora essa è continua.*

Più in generale, si può affermare che se $f : R^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è convessa, allora essa è continua all'interno del suo dominio. Non è possibile, in generale, ottenere la continuità di f su tutto il suo dominio; per esempio, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulla nell'origine e uguale a $+\infty$ altrove in $\mathbb{R}$. Allora f è convessa, $dom(f) = \{0\}$, ma f non è continua nell'origine (notiamo che in questo caso $dom(f)$ ha parte interna vuota).

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Poiché siamo in dimensione finita, possiamo trovare $N + 1$ punti $x_1, \dots, x_{N+1} \in \mathbb{R}^N$, tali che $x_0 = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i^0 x_i$, per un'opportuna scelta di $\alpha_i^0 \in (0, 1)$ con $\sum \alpha_i^0 = 1$. Se indichiamo con $U(x_0)$ la parte interna dell'inviluppo convesso dei punti $x_1, \dots, x_{N+1}$, si ha che

$U(x_0)$ è un intorno di x_0. Inoltre, per ogni $x \in U(x_0)$, abbiamo $x = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$, per un'opportuna scelta di $\alpha_i \in (0,1)$ con $\sum \alpha_i = 1$, e

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{N+1} f(x_i) \ .$$

Quindi, f è superiormente limitata in $U(x_0)$ e per il Teorema 2.9 risulterà continua in x_0. Poiché ciò vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$, la tesi è dimostrata. □

Questo risultato non si può direttamente estendere al caso in cui X sia uno spazio di Banach di dimensione infinita, a meno di non considerare ulteriori ipotesi sulla funzione f. A tale proposito, valgono i seguenti due risultati.

TEOREMA 2.12.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Supponiamo che esista un punto $x_0 \in X$ in cui f sia continua (rispett. debolmente continua); allora essa sarà continua (rispett. debolmente continua) su tutto X.

L'idea della dimostrazione consiste nell'utilizzare l'ipotesi di continuità di f in x_0 per ottenere che f è superiormente limitata in un intorno di un generico punto x ed applicare poi il Teorema 2.9.

Questo risultato generalizza al caso convesso un ben noto risultato sulle funzioni lineari, che afferma che una funzione lineare continua in un punto è continua dappertutto.

TEOREMA 2.13.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Supponiamo che f sia s.c.i. in X; allora essa sarà continua su tutto X.

Vogliamo ora migliorare i precedenti risultati, considerando il caso di funzioni convesse che siano non solo superiormente limitate, ma anche inferiormente limitate.

TEOREMA 2.14.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Supponiamo che esistano $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda \leq \Lambda$, tali che

$$\lambda \leq f(x) \leq \Lambda \qquad \forall x \in B_R \ ,$$

dove B_R è la sfera di centro l'origine e raggio R. Allora, per ogni $0 < r < R$, f è Lipschitziana in $\overline{B}_r$ con costante di Lipschitz $\frac{\Lambda - \lambda}{R - r}$.

La dimostrazione di questo teorema è conseguenza di un analogo risultato valido per funzioni di variabile reale.

TEOREMA 2.15.

Sia $f : (a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Assumiamo che esistano $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda \leq \Lambda$, tali che

$$\lambda \leq f(x) \leq \Lambda \qquad \forall x \in (a,b) \ .$$

Allora, per ogni a_0, b_0 tali che $a < a_0 < b_0 < b$, si ha che f è Lipschitziana in $[a_0, b_0]$, con costante di Lispchitz $\frac{\Lambda-\lambda}{d}$, dove $d = \min(a_0 - a, b - b_0)$.

Dimostrazione. Consideriamo $x, y \in [a_0, b_0]$ e supponiamo ad esempio $x > y$ (il caso $y > x$ si ottiene in modo analogo). Siano $b_1 \in (b_0, b)$ e $x = \alpha b_1 + (1-\alpha)y$, per un opportuno $\alpha \in (0,1)$. Allora $x - y = \alpha(b_1 - y)$ e $\alpha = \frac{x-y}{b_1-y}$ ed inoltre $f(x) \leq \alpha f(b_1) + (1-\alpha)f(y)$, ovvero

$$f(x) - f(y) \leq \alpha[f(b_1) - f(y)] \leq \frac{x-y}{b_1-y}(\Lambda - \lambda) \leq \frac{x-y}{b_1-b_0}(\Lambda - \lambda) \ .$$

Facendo tendere b_1 a b e tenendo conto della definizione di d, si ottiene

$$f(x) - f(y) \leq \frac{x-y}{d}(\Lambda - \lambda) \ . \tag{2.2}$$

Per ottenere l'altra disuguaglianza, siano ora $a_1 \in (a, a_0)$ e $y = \alpha a_1 + (1-\alpha)x$, per un opportuno $\alpha \in (0,1)$. Allora $y - x = \alpha(a_1 - x)$ e $\alpha = \frac{y-x}{a_1-x} = \frac{x-y}{x-a_1}$ ed inoltre $f(y) \leq \alpha f(a_1) + (1-\alpha)f(x)$, ovvero

$$f(y) - f(x) \leq \alpha[f(a_1) - f(x)] \leq \frac{x-y}{x-a_1}(\Lambda - \lambda) \leq \frac{x-y}{a_0-a_1}(\Lambda - \lambda) \ .$$

Facendo tendere a_1 ad a e tenendo conto della definizione di d, si ottiene

$$f(y) - f(x) \leq \frac{x-y}{d}(\Lambda - \lambda) \ . \tag{2.3}$$

Unendo le due disuguaglianze (2.2) ed (2.3), si ottiene

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{x-y}{d}(\Lambda - \lambda) = \frac{\Lambda-\lambda}{d}|x-y| \ ,$$

cioè la tesi. □

Dimostrazione del Teorema 2.14. Assumiamo che $x, y \in \overline{B}_r$, con $x \neq y$, e sia $x(t) = x + t(y-x)$, $t \in \mathbb{R}$, l'equazione parametrica della retta passante per i punti x, y. Osserviamo che $x(0) = x$ e $x(1) = y$. Siano anche

$$a = \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ x(t) \in B_R\} \qquad \text{e} \qquad b = \sup\{t \in \mathbb{R} \ : \ x(t) \in B_R\}$$
$$a_0 = \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ x(t) \in B_r\} \qquad \text{e} \qquad b_0 = \sup\{t \in \mathbb{R} \ : \ x(t) \in B_r\} \ .$$

Per quanto detto, $a < a_0 \leq 0 < 1 \leq b_0 < b$. Definiamo la funzione convessa e propria $g(t) = f(x(t))$ ed osserviamo che $\lambda \leq g(t) \leq \Lambda$, per ogni $t \in (a, b)$. Dal Teorema 2.15 segue che

$$|g(1) - g(0)| \leq \frac{\Lambda - \lambda}{d} \ ,$$

ovvero $|f(y) - f(x)| \leq \frac{\Lambda-\lambda}{d}$. Resta solo da verificare che $d \geq (R-r)/\|x-y\|_X$. Utilizzando la disuguaglianza triangolare ed osservando che $\|x(a)\|_X = R$, $\|x(a_0)\|_X = r$ e

$$\|x(a) - x(a_0)\|_X \leq (a_0 - a)\|y - x\|_X \ ,$$

si ottiene

$$R = \|x(a)\|_X \leq \|x(a) - x(a_0)\|_X + \|x(a_0)\|_X \leq (a_0 - a)\|y - x\|_X + r \ . \tag{2.4}$$

Ripetendo il medesimo ragionamento e tenendo conto questa volta che $\|x(b)\|_X = R$, $\|x(b_0)\|_X = r$ e

$$\|x(b) - x(b_0)\|_X \leq (b - b_0)\|y - x\|_X \ ,$$

si ottiene

$$R = \|x(b)\|_X \leq \|x(b) - x(b_0)\|_X + \|x(b_0)\|_X \leq (b - b_0)\|y - x\|_X + r \ . \tag{2.5}$$

Da (2.4) e (2.5) si ottiene subito che $R - r \leq d\|y - x\|_X$, cioè la tesi. □

ESERCIZIO: Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa tale che

$$0 \leq f(x) \leq c(1 + |x|)$$

per un'opportuna constante $c > 0$. Provare che f è globalmente Lipschitziana su $\mathbb{R}^N$.

Vediamo ora alcune conseguenze del Teorema di Hahn-Banach.

TEOREMA 2.16.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Allora essa è s.c.i. per la topologia forte se e solo se lo è per la topologia debole.

Dimostrazione. Il risultato è conseguenza diretta dell'Osservazione 1.24 e dei Teoremi 2.4 e 2.5. Infatti, f è convessa e s.c.i. nella topologia forte se e solo se il suo epigrafico è un sottoinsieme convesso e chiuso nella topologia forte di $X \times \mathbb{R}$. D'altra parte, in quanto insieme convesso, esso è chiuso nella topologia forte se e solo se è sequenzialmente chiuso nella topologia debole di $X \times \mathbb{R}$, cioè se e solo se f è convessa e s.c.i. nella topologia debole. □

In particolare, dal precedente teorema riotteniamo il risultato già visto in (iii) del Teorema 1.16. Infatti, la funzione $x \in X \mapsto \|x\|_X$ è convessa e continua (quindi s.c.i.) nella topologia forte, pertanto essa risulterà s.c.i. anche nella topologia debole. Quindi, per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in X si avrà $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$.

TEOREMA 2.17.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione tale che, per ogni $x \in X$, $f(x) > -\infty$. Allora f è convessa e s.c.i. se e solo se, per ogni $x \in X$, si ha

$$f(x) = \sup_{g \in \mathcal{A}(f)} g(x) \tag{2.6}$$

dove $\mathcal{A}(f) = \{g : X \to \mathbb{R} \ : \ g \text{ affine, continua e } g(x) \leq f(x) \ \forall x \in X\}$.

DEFINIZIONE 2.18. Data $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, per ogni $x \in X$, definiamo

$$sc^-(f)(x) = \sup_{g \in \mathcal{S}(f)} g(x) \ , \tag{2.7}$$

dove $\mathcal{S}(f) = \{g : X \to \overline{\mathbb{R}} \ : \ g \text{ s.c.i. e } g(x) \leq f(x) \ \forall x \in X\}$.

La funzione $sc^-(f) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta *inviluppo semicontinuo inferiormente* di f ed è la più grande funzione s.c.i. minorante f.

Ovviamente se $\mathcal{S}(f)$ contiene tutte le funzioni debolmente s.c.i. e minoranti f, allora $sc^-(f)$ sarà l'inviluppo s.c.i. di f rispetto alla topologia debole di X; viceversa, se $\mathcal{S}(f)$ contiene solo le funzioni fortemente s.c.i. e minoranti f, allora $sc^-(f)$ sarà l'inviluppo s.c.i. di f rispetto alla topologia forte di X.

PROPOSIZIONE 2.19.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa tale che, per ogni $x \in X$, $f(x) > -\infty$. Allora $sc^-(f) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è anch'essa una funzione convessa.

Dimostrazione. Se $f \equiv +\infty$, allora $sc^-(f) = f$ e non c'è nulla da dimostrare. Assumiamo, quindi, che f sia propria. Innanzitutto, osserviamo che la chiusura di un insieme convesso è anch'essa convessa, quindi $\overline{epi}(f)$ è un insieme convesso. Inoltre, se $f \geq g$, si ha $epi(f) \subseteq epi(g)$ e, dal Teorema 2.5, $epi(g)$ è chiuso se g è s.c.i.; pertanto, poiché $sc^-(f)$ è s.c.i. e $sc^-(f) \leq f$, si ha

$$\overline{epi}(f) \subseteq epi\big(sc^-(f)\big) \ .$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, basta considerare la funzione $\overline{g}$ associata all'epigrafico $\overline{epi}(f)$. Poiché tale epigrafico è chiuso, dal Teorema 2.5 si ottiene che $\overline{g}$ è s.c.i. e, poiché $epi(f) \subseteq \overline{epi}(f)$, si ottiene anche che $\overline{g} \leq f$, quindi $\overline{g} \in \mathcal{S}(f)$ e

$$epi\big(sc^-(f)\big) = \bigcap_{g \in \mathcal{S}(f)} epi(g) \subseteq epi(\overline{g}) = \overline{epi}(f) \ .$$

Abbiamo così ottenuto che $epi\big(sc^-(f)\big) = \overline{epi}(f)$, cioè $epi\big(sc^-(f)\big)$ è convesso e quindi, dal Teorema 2.4, si ricava che $sc^-(f)$ è una funzione convessa. $\square$

TEOREMA 2.20.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa tale che esista una funzione affine e continua $h : X \to \mathbb{R}$ con $h \leq f$. Allora

$$sc^-(f)(x) = \sup_{g \in \mathcal{A}(f)} g(x) \ ,$$

dove $\mathcal{A}(f) = \{g : X \to \mathbb{R} \ : \ g \text{ affine, continua e } g(x) \leq f(x) \ \forall x \in X\}$.

DEFINIZIONE 2.21. Data $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, per ogni $x \in X$, definiamo

$$co(f)(x) = \sup_{g \in \mathcal{C}(f)} g(x) \ ,$$

dove $\mathcal{C}(f) = \{g : X \to \overline{\mathbb{R}} \ : \ g \text{ convessa e } g(x) \leq f(x) \ \forall x \in X\}$.

La funzione $co(f) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta *inviluppo convesso* di f ed è la più grande funzione convessa minorante f.

TEOREMA 2.22.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione tale che esista una funzione affine e continua $h : X \to \mathbb{R}$ con $h \leq f$. Allora

$$sc^-\big(co(f)\big)(x) = \sup_{g \in \mathcal{A}(f)} g(x) \ ,$$

dove $\mathcal{A}(f) = \{g : X \to \mathbb{R} \ : \ g \text{ affine, continua e } g(x) \leq f(x) \ \forall x \in X\}$.

Data $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, introdurremo ora le nozioni di funzione polare e bipolare di f e ne studieremo le principali proprietà, evidenziandone, in particolare, le relazioni con l'inviluppo convesso e s.c.i. di f.

DEFINIZIONE 2.23. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Indicheremo con $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione coniugata o polare di f, definita da

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}[\langle x^*, x\rangle - f(x)] \ .$$

La funzione f^* è detta anche *trasformata di Legendre* di f.

Indicheremo con $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione biconiugata o bipolare di f, (cioè la funzione coniugata di f^*), definita da

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}[\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)] \ .$$

Osserviamo che, se $f \leq g$, allora $f^* \geq g^*$.

Supponiamo che $X = \mathbb{R}$ e che $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione assegnata. Allora, fissata la pendenza $x^* \in X^* = \mathbb{R}$, il valore $f^*(x^*)$ rappresenta, con il segno opposto, l'intercetta sull'asse delle ordinate della massima retta di pendenza x^* il cui grafico si mantiene globalmente al di sotto del grafico di f.

OSSERVAZIONE 2.24. Osserviamo che, se esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = -\infty$, allora $f^*(x^*) \equiv +\infty$, per ogni $x^* \in X^*$. Inoltre, se $f(x) \equiv +\infty$, allora $f^*(x^*) \equiv -\infty$. Quindi la funzione polare è significativa quando f è propria. Analogo discorso vale per f^*, pertanto la funzione bipolare è significativa quando f^* è propria.

TEOREMA 2.25.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, propria e s.c.i.. Allora f^* è convessa, propria e s.c.i..

Dimostrazione. Poiché f è propria, esiste almeno un punto $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) < +\infty$, quindi $f^*(x^*) \geq \langle x^*, x_0\rangle - f(x_0) > -\infty$, per ogni $x^* \in X^*$. Inoltre, per definizione, f^* è l'estremo superiore di funzioni affini continue, quindi è convessa e s.c.i. per il Teorema 2.17. Per dimostrare che f^* non è identicamente $+\infty$ utilizziamo il Teorema di Hahn-Banach (Teorema 1.22). Sia $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) < +\infty$ e sia $t_0 < f(x_0)$, cioè $t_0 \notin epi(f)$. Allora esiste un iperpiano in $X \times \mathbb{R}$ che separa strettamente l'insieme convesso compatto $\{(x_0, t_0)\}$ dall'insieme convesso e chiuso $epi(f)$; cioè esistono $(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\langle x^*, x\rangle + t^*t > \alpha \qquad \forall (x,t) \in epi(f) \ ; \tag{2.8}$$

$$\langle x^*, x_0\rangle + t^*t_0 < \alpha \ . \tag{2.9}$$

In particolare, prendendo $(x,t) = (x_0, f(x_0))$ in (2.8) si ottiene

$$\langle x^*, x_0\rangle + t^*f(x_0) > \alpha > \langle x^*, x_0\rangle + t^*t_0 \ ,$$

cioè $t^* > 0$. Quindi da (2.8), dividendo tutto per $-1/t^*$ si ricava

$$\langle -\frac{1}{t^*}x^*, x\rangle - t < -\frac{\alpha}{t^*} \qquad \forall (x,t) \in epi(f) \ . \tag{2.10}$$

Scegliendo ora $t = f(x)$ in (2.10) e passando al sup su X si ha

$$f^*(-\frac{1}{t^*}x^*) = \sup_{x\in X}[\langle -\frac{1}{t^*}x^*, x\rangle - f(x)] \le -\frac{\alpha}{t^*} < +\infty \ .$$

$\square$

OSSERVAZIONE 2.26. Notiamo che dall'Osservazione 2.24 e dalla dimostrazione del precedente teorema si ottiene che f^* risulta essere convessa e s.c.i. senza necessità di alcuna richiesta su f. Se inoltre f è propria, allora $f^*(x^*) > -\infty$, per ogni $x^* \in X^*$.

I prossimi teoremi ci forniscono delle relazioni tra f, $co(f)$, $sc^-\big(co(f)\big)$ ed f^{**}.

TEOREMA 2.27.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione assegnata. Allora

(i) $f^{**} \le co(f) \le f$.

(ii) $f^{***} = f^*$.

Dimostrazione. Se esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = -\infty$, allora $f^*(x^*) \equiv +\infty$, $f^{**}(x) \equiv -\infty$ e $f^{***}(x^*) \equiv +\infty$, quindi non c'è nulla da dimostrare.

Se $f(x) \equiv +\infty$, allora (i) è ovvia e, poiché $f^*(x^*) \equiv -\infty$, si ha $f^{**}(x) \equiv +\infty$ e $f^{***}(x^*) \equiv -\infty$, quindi anche (ii) segue banalmente.

Assumiamo pertanto che f sia propria. In tal caso, dall'Osservazione 2.26 si ha che $f^*(x^*) > -\infty$, per ogni $x^* \in X^*$. Inoltre, se f^* non fosse propria, si avrebbe $f^*(x^*) \equiv +\infty$, e quindi $f^{**}(x) \equiv -\infty$ ed $f^{***}(x^*) \equiv +\infty$. Pertanto, di nuovo, (i) e (ii) seguono banalmente.

Quindi possiamo assumere che anche f^* sia propria. In tal caso, dal Teorema 2.25 applicato con f^* al posto di f, si ottiene che anche f^{**} è propria. Pertanto, dimostriamo il teorema nell'ipotesi in cui f, f^* ed f^{**} siano proprie.

(i) Per definizione, ricaviamo subito che f^{**} è convessa e, poiché $f(x) \ge \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $x^* \in X^*$, si ottiene anche $f^{**} \le f$. Pertanto $f^{**} \le co(f) \le f$.

(ii) Da (i) si ottiene subito che $f^{***} \ge f^*$. D'altra parte, per definizione, si ha che, per ogni $x \in X$ e per ogni $x^* \in X^*$,

$$\langle x^*, x\rangle - f^{**}(x) \le f^*(x^*)$$

che implica $f^{***} \le f^*$, cioè la tesi. $\square$

TEOREMA 2.28 (Teorema di Fenchel-Moreau).

Assumiamo che $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione convessa, propria e s.c.i.. Allora $f^{**} = f$.

Dimostrazione. Poiché abbiamo già dimostrato nel Teorema 2.27 (i) che $f^{**} \le f$, senza alcuna ipotesi su f, è sufficiente mostrare che nel caso in cui f sia anche convessa, propria e s.c.i., vale la disuguaglianza opposta. A tal fine, assumiamo dapprima $f \ge 0$ e supponiamo che per assurdo esista un punto $x_0 \in X$ tale che $f^{**}(x_0) < f(x_0)$. Ovviamente $f^{**}(x_0) < +\infty$ e quindi dal Teorema di Hahn-Banach (Teorema 1.22) è possibile separare in senso stretto con un iperpiano in

$X \times \mathbb{R}$ l'insieme convesso e chiuso $epi(f)$ dall'insieme convesso e compatto costituito dal solo punto $(x_0, f^{**}(x_0)) \notin epi(f)$. Esistono quindi $(x^*, t^*) \in X \times \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\langle x^*, x\rangle + t^* t > \alpha > \langle x^*, x_0\rangle + t^* f^{**}(x_0) \qquad \forall (x,t) \in epi(f)\ . \tag{2.11}$$

Se $f(x_0) < +\infty$, scegliendo $(x,t) = (x_0, f(x_0))$, si ricava $t^* > 0$. Se invece $f(x_0) = +\infty$, prendendo $t = n \to +\infty$, dalla precedente disuguaglianza si ottiene che $t^* \geq 0$. In entrambi i casi, poiché $f \geq 0$, prendendo $x \in dom(f)$ e $t = f(x)$ in (2.11), si ottiene che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$f^*(-\frac{x^*}{t^*+\varepsilon}) = \sup_{x\in X}\left[\langle -\frac{x^*}{t^*+\varepsilon}, x\rangle - f(x)\right] \leq \sup_{x\in dom(f)}\left[\langle -\frac{x^*}{t^*+\varepsilon}, x\rangle - \frac{t^*}{t^*+\varepsilon} f(x)\right] \leq -\frac{\alpha}{t^*+\varepsilon}$$

e quindi

$$f^{**}(x_0) \geq \langle -\frac{x^*}{t^*+\varepsilon}, x_0\rangle - f^*\left(-\frac{x^*}{t^*+\varepsilon}\right) \geq \langle -\frac{x^*}{t^*+\varepsilon}, x_0\rangle + \frac{\alpha}{t^*+\varepsilon}$$

ovvero

$$\langle x^*, x_0\rangle + (t^*+\varepsilon) f^{**}(x_0) \geq \alpha \qquad \forall \varepsilon > 0\ .$$

Lasciando tendere $\varepsilon \to 0$, si ottiene $\langle x^*, x_0\rangle + t^* f^{**}(x_0) \geq \alpha$, che è in contraddizione con (2.11). Il teorema è, quindi, dimostrato, nel caso in cui $f \geq 0$.

Il caso generale segue dalla prima parte della dimostrazione, rimpiazzando f con $\overline{f}(\cdot) = f(\cdot) + f^*(x_0^*) - \langle x_0^*, \cdot\rangle$, dove $-\infty < f^*(x_0^*) < +\infty$ (notiamo che un tale x_0^* esiste poiché f^* è propria, per il Teorema 2.25). Infatti, in questo caso $\overline{f}$ risulta essere convessa, propria e s.c.i. ed inoltre $\overline{f} \geq 0$, per definizione di funzione polare. Quindi, per quanto appena dimostrato, $\overline{f}^{**} = \overline{f}$. Svolgendo i calcoli, si ottiene

$$\overline{f}^*(x^*) = f^*(x^* + x_0^*) - f^*(x_0^*) \qquad \text{e} \qquad \overline{f}^{**}(x) = f^{**}(x) + f^*(x_0^*) - \langle x_0^*, x\rangle\ ,$$

da cui, imponendo la condizione trovata $\overline{f}^{**} = \overline{f}$, si ha subito la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.29. Notiamo che nel caso in cui $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione convessa, propria e s.c.i., allora la proprietà (ii) del Teorema 2.27 discende direttamente dal Teorema 2.28 applicato ad f^*.

OSSERVAZIONE 2.30. Data $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dall'Osservazione 2.26 applicata con f rimpiazzata da f^*, si ottiene che f^{**} è s.c.i. e convessa. Inoltre, dal Teorema 2.27 (i) si ottiene che $f^{**} \leq co(f)$, pertanto $f^{**} \leq (sc^-\big(co(f)\big)$ e, per definizione, $(sc^-\big(co(f)\big) \leq f$, ovvero

$$f^{**}(x) \leq (sc^-\big(co(f)\big)(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in X\ . \tag{2.12}$$

Ancora dal Teorema 2.27 (ii) applicato con f^{**} al posto di f^*, si ottiene che $f^{****} = f^{**}$. Inoltre, passando alle bipolari e ricordandone la definizione, si osserva che le disuguaglianze si conservano, pertanto da (2.12) segue

$$f^{**}(x) = f^{****}(x) \leq [(sc^-\big(co(f)\big)]^{**}(x) \leq f^{**}(x) \qquad \forall x \in X\ ,$$

cioè $f^{**} = [sc^-\big(co(f)\big)]^{**}$.

TEOREMA 2.31.

Assumiamo che $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sia una funzione tale che esista una funzione affine e continua* $h : X \to \mathbb{R}$ *con* $h \leq f$. *Allora* $f^{**} = sc^-\big(co(f)\big)$.

Dimostrazione. Se $f(x) \equiv +\infty$, allora essa è convessa e continua, pertanto $f \equiv sc^-\big(co(f)\big)$. Inoltre, $f^* \equiv -\infty$ e $f^{**} \equiv +\infty$, quindi $f^{**} = sc^-\big(co(f)\big)$ e la tesi è provata.

Se $f \not\equiv +\infty$, poiché, per ipotesi, $h \leq f$, ne segue che f è propria e che $h \leq sc^-\big(co(f)\big) \leq f$, quindi anche $sc^-\big(co(f)\big)$ è una funzione propria. Allora dal Teorema 2.28, si ottiene che $[sc^-\big(co(f)\big)]^{**} = sc^-\big(co(f)\big)$. Pertanto, dall'Osservazione 2.30 si ottiene

$$f^{**} = [(sc^-\big(co(f)\big)]^{**} = sc^-\big(co(f)\big) \ ,$$

cioè la tesi. $\square$

ESEMPIO 2.32. Osserviamo che nel precedente teorema l'ipotesi sull'esistenza di una funzione affine e continua minorante f è essenziale. Infatti, in caso contrario, può accadere che $f^{**}(x) < sc^-\big(co(f)\big)(x)$, per qualche $x \in X$. Ad esempio, sia $X = \mathbb{R}$ e

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \neq 0 \ , \\ -\infty & \text{se } x = 0 \ . \end{cases}$$

In tal caso si ottiene facilmente che $f = sc^-\big(co(f)\big)$, mentre $f^{**} \equiv -\infty$ e quindi $f^{**}(x) < sc^-\big(co(f)\big)(x)$, per $x \neq 0$.

Osserviamo che tale anomalia, in realtà, non dipende dal fatto che nell'esempio precedente la funzione non fosse propria. Se consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0 \ , \\ 0 & \text{se } x = 0 \ , \\ -1/x & \text{se } x > 0 \ , \end{cases}$$

si osserva che essa è propria e

$$sc^-\big(co(f)\big)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0 \ , \\ -\infty & \text{se } x \geq 0 \ , \end{cases}$$

mentre $f^{**} \equiv -\infty$, pertanto di nuovo si ha $f^{**}(x) < sc^-\big(co(f)\big)(x)$, per $x < 0$.

ESERCIZIO:

(i) Sia $I = [0,1]$ e $i_I : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione indicatrice di I, cioè $i_I(x) = 0$ se $x \in I$ e $i_I(x) = +\infty$ se $x \notin I$. Determinare le funzioni i_I^* e i_I^{**}.

(ii) Determinare le funzioni i_I^* e i_I^{**}, nel caso in cui $I = (0,1)$.

(iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$, con $1 < p < +\infty$. Determinare le funzioni f^* ed f^{**}.

(iv) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$. Determinare le funzioni f^* ed f^{**}.

(v) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identicamente nulla. Determinare le funzioni f^* ed f^{**}.

LEMMA 2.33.

Sia $\phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione convessa e pari. Sia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *definita da* $f(x) = \phi(\|x\|_X)$. *Allora* $f^*(x^*) = \phi^*(\|x^*\|_{X^*})$.

Dimostrazione. Per definizione, si ha

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}[\langle x^*, x\rangle - f(x)] = \sup_{x\in X}[\langle x^*, x\rangle - \phi(\|x\|_X)] \ ,$$

che possiamo anche riscrivere nella forma

$$f^*(x^*) = \sup_{t\geq 0}\sup_{\|x\|_X=t}[\langle x^*, x\rangle - \phi(t)] = \sup_{t\geq 0}[\big(\sup_{\|x\|_X=t}\langle x^*, x\rangle\big) - \phi(t)] = \sup_{t\geq 0}[t\|x^*\|_{X^*} - \phi(t)] \ . \tag{2.13}$$

Osserviamo che, sempre per definizione,

$$\phi^*(\|x^*\|_{X^*}) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[t\|x^*\|_{X^*} - \phi(t)] \ ; \tag{2.14}$$

quindi resta solo da mostrare che (2.13) coincide con (2.14); cioè dobbiamo verificare che nella formula precedente è sufficiente fare l'estremo superiore solo sui numeri reali non negativi. A tale scopo utilizziamo l'ipotesi di simmetria su ϕ: poiché essa è una funzione pari, per ogni $t>0$, si ha

$$-t\|x^*\|_{X^*} - \phi(-t) = -t\|x^*\|_{X^*} - \phi(t) \leq t\|x^*\|_{X^*} - \phi(t) \ ,$$

e quindi

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[t\|x^*\|_{X^*} - \phi(t)] = \sup_{t\geq 0}[t\|x^*\|_{X^*} - \phi(t)] \ . \tag{2.15}$$

La tesi segue da (2.13), (2.14) ed (2.15). □

ESERCIZIO: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) Calcolare $(f+\lambda)^*$.
(ii) Calcolare $(\lambda f)^*$, per $\lambda > 0$.

ESERCIZIO: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_X^p$, con $1 < p < +\infty$. Determinare le funzioni f^* ed f^{**}.

ESERCIZIO: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \|x\|_X$. Verificare che $f^*(x^*) = i_{\overline{B}_1(0)}(x^*)$, dove $i_{\overline{B}_1(0)}$ denota la funzione indicatrice della palla chiusa di raggio unitario centrata nell'origine.

ESERCIZIO: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lambda\|x\|_X^2 \leq f(x) \leq \Lambda(1 + \|x\|_X^2) \qquad \forall x \in X \ ,$$

dove $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$. Determinare quale disuguaglianza soddisfa la funzione f^*.

DEFINIZIONE 2.34. Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Essa si dice *differenziabile secondo Gâteaux* in $x \in X$, se per ogni $y \in X$ esiste finito il seguente limite

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} =: df(x, y) \ ,$$

e se l'applicazione $y \in X \mapsto df(x, y)$ è lineare e continua; cioè se esiste un'applicazione $df(x) \in X^*$ tale che $df(x, y) = \langle df(x), y\rangle$. In tal caso, l'applicazione $df(x)$ è detta *differenziale o derivata di Gâteaux* di f in x.

DEFINIZIONE 2.35. Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Essa si dice *differenziabile secondo Fréchet* in $x \in X$, se esiste un'applicazione lineare e continua $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \langle A, y - x \rangle}{\|y - x\|_X} = 0 \ .$$

Osserviamo che le precedenti definizioni in realtà sono locali, quindi è possibile dare senso alla nozione di differenziabilità secondo Gâteaux o secondo Fréchet in un punto $x \in X$ anche per una funzione a valori reali estesi, pur di supporre che essa sia finita in un intorno di x.

OSSERVAZIONE 2.36.

(i) Se f è differenziabile secondo Fréchet lo è anche secondo Gâteaux. In tal caso, $A = df(x)$.

(ii) Se $X = \mathbb{R}^N$ $(N > 1)$, la differenziabilità secondo Gâteaux di f corrisponde alla derivabilità di f lungo ogni direzione, unitamente alla richiesta che la derivata direzionale dipenda linearmente dalla direzione. A sua volta, la differenziabilità secondo Fréchet corrisponde alla differenziabilità delle funzioni di più variabili.

ESERCIZIO: Dimostrare l'affermazione (i) dell'Osservazione 2.36.

È ben noto che, per le funzioni definite su $\mathbb{R}^N$, la derivabilità non implica, in generale, la differenziabilità, a meno che non si facciano ulteriori ipotesi sulle derivate parziali. Analogamente, la differenziabilità secondo Gâteaux, in generale, non implica quella secondo Fréchet, a meno che non si richieda che il differenziale di Gâteaux dipenda con continuità da x, come segue dal prossimo teorema.

TEOREMA 2.37.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile secondo Gâteaux in X. Assumiamo che l'applicazione $df : X \to X^*$ sia continua. Allora f è differenziabile secondo Fréchet in X.

ESERCIZIO: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile secondo Gâteaux. Assumiamo che

$$\|x\|_X^p \leq f(x) \leq c(1 + \|x\|_X^p) \qquad 1 \leq p < +\infty \ .$$

Dimostrare che

$$\|df(x)\|_{X^*} \leq \widetilde{c}(1 + \|x\|_X^{p-1}) \ .$$

(Hint.: ricordare il Teorema 2.14.)

DEFINIZIONE 2.38. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Dato $x \in X$, diremo che $x^* \in X^*$ è un *sottogradiente* di f nel punto x se

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \qquad \forall y \in X \ . \tag{2.16}$$

Indicheremo con $\partial f(x) \subseteq X^*$ l'insieme di tutti i sottogradienti di f nel punto x e chiameremo $\partial f(x)$ il *sottodifferenziale* di f in x.

Osserviamo che se $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, allora $f(x_0) < +\infty$. Infatti, preso $x \in dom(f)$ e $x^* \in \partial f(x_0)$, dalla (2.16) si ha

$$f(x_0) \leq f(x) - \langle x^*, x - x_0 \rangle < +\infty \ .$$

ESERCIZIO: Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$. Verificare che

$$\partial f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \ , \\ [-1, 1] & \text{se } x = 0 \ , \\ -1 & \text{se } x < 0 \ . \end{cases}$$

TEOREMA 2.39.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, propria e differenziabile secondo Gâteaux in x. Allora $\partial f(x) = \{df(x)\}$.

Dimostrazione. Poiché f è differenziabile secondo Gâteaux in x, per definizione essa è finita in un intorno di x. Inoltre, poiché f è convessa abbiamo che, per ogni $y \in X$,

$$\frac{1}{t}[f(x + t(y - x)) - f(x)] \leq f(y) - f(x) \qquad \forall t \in (0, 1) \ .$$

Poiché f è differenziabile secondo Gâteaux, passando al limite per $t \to 0^+$ nella precedente disuguaglianza, otteniamo

$$\langle df(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \qquad \forall y \in X \ ,$$

cioè $df(x) \in \partial f(x)$. Vogliamo mostrare che $df(x)$ è l'unico elemento del sottodifferenziale. Supponiamo, per assurdo, che esista un altro elemento $x^* \in \partial f(x)$ tale che $x^* \neq df(x)$. Allora

$$\frac{f(x + ty) - f(x)}{t} \geq \langle x^*, y \rangle \qquad \forall y \in X, \ \forall t > 0 \ .$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ nella precedente disuguaglianza e tenendo conto del fatto che f è Gâteaux differenziabile in x, si ricava $\langle df(x), y \rangle \geq \langle x^*, y \rangle$. Sostituendo y con $-y$ e ripetendo il calcolo precedente si ottiene anche $\langle df(x), y \rangle \leq \langle x^*, y \rangle$, cioè $\langle df(x), y \rangle = \langle x^*, y \rangle$, per ogni $y \in X$, ovvero $x^* = df(x)$, che è una contraddizione. La tesi è dunque provata. $\square$

In generale, se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione convessa e propria, il cui sottodifferenziale si riduce ad un singoletto in un punto $x \in X$, in cui è finita, non è detto che essa sia differenziabile secondo Gâteaux in tale punto, a meno che non siano soddisfatte ulteriori ipotesi, come stabilito nel seguente teorema.

TEOREMA 2.40.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Assumiamo che f sia continua e finita in $x \in X$ e che $\partial f(x)$ sia un singoletto, allora f è differenziabile secondo Gâteaux in x.

Osserviamo che le ipotesi di continuità e finitezza sono essenziali; infatti, in caso contrario, è possibile costruire esempi di funzioni convesse, il cui sottodifferenziale è un singoletto, che non sono differenziabili secondo Gâteaux.

ESEMPIO 2.41. Sia $X = L^2(\Omega)$ e consideriamo il funzionale $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definito da

$$F(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx & \text{se } u \in H_0^1(\Omega) \ , \\ +\infty & \text{se } u \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Ovviamente, F è convesso, proprio e s.c.i., ma esso non è continuo né differenziabile secondo Gâteaux in nessun punto in cui è finito. Infatti, presa $u \in H_0^1(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$, si ha che $w = u + tv \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$ e $w \to u$ in X, per $t \to 0$; ma $F(w) = +\infty$, mentre $F(u) < +\infty$. D'altra parte, in tutti i punti in cui $\partial F \neq \emptyset$, si ha che esso è dato da un singoletto.

Infatti, notiamo che $X^* = L^2(\Omega)$ e, quindi, $\partial F \subseteq L^2(\Omega)$. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ e supponiamo che $u^* \in \partial F(u)$, allora

$$F(w) \geq F(u) + \langle u^*, w - u \rangle \qquad \forall w \in X \ .$$

Poiché se $w \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$, $F(w) = +\infty$, la disuguaglianza precedente diventa significativa quando $w \in H_0^1(\Omega)$; in tal caso, si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \langle u^*, w - u \rangle \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \ .$$

Scegliamo, in particolare, $w = u+tv$, con $v \in H_0^1(\Omega)$ e ricordiamo che, nel nostro caso, $\langle u^*, w-u \rangle = \int_\Omega u^*(w - u) \, dx$. Sostituendo nella precedente disuguaglianza si ricava

$$\frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + t\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - u^* v \, dx) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ . \tag{2.17}$$

Affinché (2.17) sia sempre verificata, si deve avere necessariamente che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega u^* v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \ .$$

Da ciò si ricava che $-\Delta u = u^*$ nel senso delle distribuzioni; ma, poiché $u^* \in X^* = L^2(\Omega)$, tale uguaglianza può essere verificata solo per le funzioni $u \in H_0^1(\Omega)$ che abbiano $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (per esempio, per le funzioni $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$). In tal caso, il sottodifferenziale è costituito dal singoletto $\{-\Delta u\}$; in caso contrario, il sottodifferenziale è necessariamente vuoto.

In sostanza, abbiamo ottenuto che il funzionale considerato, nei punti dove è finito, o ha il sottodifferenziale vuoto oppure, pur non essendo differenziabile secondo Gâteaux, ha il sottodifferenziale che si riduce ad un singoletto.

Naturalmente, la situazione è ben diversa se $X = H_0^1(\Omega)$ e si considera il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \ .$$

In tal caso, F risulta essere convesso, finito e s.c.i. su X. Esso è anche differenziabile secondo Gâteaux in ogni punto e

$$\partial F(u) = \{dF(u)\} = \{-\Delta u\} \subset H^{-1}(\Omega) = X^* \ .$$

ESERCIZIO:

(i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa derivabile in $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa ed $x \in \mathbb{R}$ un punto in cui esistono la derivata destra $f'_+(x)$ di f in x e la derivata sinistra $f'_-(x)$ di f in x . Assumiamo che $f'_-(x) < f'_+(x)$. Dimostrare che $\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)]$.

(iii) Sia $C \subseteq X$ un insieme convesso e aperto e sia i_C la funzione indicatrice di C. Determinare $\partial i_C(x)$, per ogni $x \in X$.

TEOREMA 2.42.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, propria e tale che $\partial f(x) \neq \emptyset$. Allora f è s.c.i. in $x \in X$.

Nell'enunciato del precedente teorema non serve specificare se si tratta di s.c.i. nella topologia debole o forte, in quanto, poiché f è convessa, le due nozioni coincidono (ricordare il Teorema 2.16).

Dimostrazione. Poiché f è convessa, propria e $\partial f(x) \neq \emptyset$, per ogni $x^* \in \partial f(x)$ si ha

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \qquad \forall y \in X \ .$$

Passando al limite per $y \to x$ nella disuguaglianza precedente si ottiene subito la tesi. $\square$

In particolare, dal precedente teorema si ottiene che se $f : X \to \mathbb{R}$ è convessa e differenziabile secondo Gâteaux in x allora essa è s.c.i. in x, in quanto il suo sottodifferenziale coincide con il singoletto dato dalla derivata di Gâteaux e quindi è non vuoto.

Vediamo ora un teorema che ci garantisca l'esistenza del sottodifferenziale.

TEOREMA 2.43.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Assumiamo che f sia continua e finita in $x \in X$. Allora $\partial f(x) \neq \emptyset$.

OSSERVAZIONE 2.44. Osserviamo che, se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa, dal Teorema 2.11, segue che essa è continua su tutto $\mathbb{R}^N$, pertanto dal Teorema 2.43 si deduce che il suo sottodifferenziale è non vuoto in ogni punto di $\mathbb{R}^N$. Se inoltre in un punto $x \in \mathbb{R}^N$ si ha che il sottodifferenziale è un singoletto, dal Teorema 2.40 si ottiene anche che in tale punto f è differenziabile secondo Gâteaux. Analogo discorso vale per $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa e propria, pur di limitarsi ai punti interni al dominio. In generale non è possibile estendere questo risultato a tutto il dominio. Ad esempio, se consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x(1-x)} & \text{se } x \in [0,1] \ , \\ +\infty & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \ , \end{cases}$$

essa è convessa, propria e s.c.i., ma $\partial f(0) = \partial f(1) = \emptyset$.

Vediamo ora la relazione che intercorre tra gli elementi del sottodifferenziale e la funzione polare. Dalla definizione di funzione polare, si ottiene che, se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione convessa e propria,

$$f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle \qquad \forall x \in X,\ \forall x^* \in X^* \ . \tag{2.18}$$

La precedente disuguaglianza è, in realtà, un'uguaglianza sugli elementi $x^* \in \partial f(x)$, come si stabilisce nel prossimo teorema.

TEOREMA 2.45.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Allora $x^* \in \partial f(x)$ se e solo se

$$f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x\rangle \ .$$

Dimostrazione. Tenendo conto della (2.18), il teorema sarà dimostrato se proveremo che

$$f^*(x^*) + f(x) \leq \langle x^*, x\rangle \qquad \forall x \in X,\ \forall x^* \in X^* \ .$$

La tesi segue dalla seguente catena di implicazioni:

$$\begin{aligned}
x^* \in \partial f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle && \forall y \in X \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x^*, x\rangle - f(x) \geq \langle x^*, y\rangle - f(y) && \forall y \in X \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x^*, x\rangle - f(x) \geq \sup_{y\in X}[\langle x^*, y\rangle - f(y)] = f^*(x^*) \\
&\Longleftrightarrow \quad f^*(x^*) + f(x) \leq \langle x^*, x\rangle \ .
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2.46.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, propria e s.c.i. Allora

$$x^* \in \partial f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \partial f^*(x^*) \ .$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.45 applicato prima alla coppia f, f^* e poi alla coppia f^*, f^{**}, si ricava

$$\begin{aligned}
x^* \in \partial f(x) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x\rangle \ , \\
x \in \partial f^*(x^*) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad f^{**}(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle \ .
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Poiché f è convessa, propria e s.c.i., dal Teorema 2.28, si ha che $f^{**} = f$, quindi la tesi segue da (2.19) con f^{**} rimpiazzata da f. □

In un certo senso, il precedente teorema afferma che il sottodifferenziale di f^* è l'inverso del sottodifferenziale di f.

Il prossimo teorema fornisce un importante legame tra i punti di minimo di f e la struttura del suo sottodifferenziale in tali punti.

TEOREMA 2.47.

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa e propria. Allora $x \in X$ è punto di minimo per f se e solo se $0 \in \partial f(x)$.

Dimostrazione. La tesi si ottiene osservando che $x \in X$ è punto di minimo per f in X se e solo se, per ogni $y \in X$, si ha
$$f(y) \geq f(x) = f(x) + \langle 0, y - x \rangle \ ,$$
cioè se e solo se $0 \in \partial f(x)$. □

In particolare, se oltre a soddisfare le ipotesi del teorema precedente, f è anche differenziabile secondo Gâteaux in x, allora $df(x) = 0$.

ESERCIZIO: Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, calcolare $\partial f(0)$ nei casi:

$$(i) \qquad f(x) = \max(|x_1|, |x_2|) \ ; \qquad (ii) \qquad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x_1 \geq 0 \ ; \\ +\infty & \text{altrimenti} \ ; \end{cases}$$
$$(iii) \qquad f(x) = \max(x_1, x_2) \ ; \qquad (iv) \qquad f(x) = |x| \ .$$

(Hint.: Nel caso (iv), provare ad utilizzare il Teorema 2.46.)

Terminiamo il capitolo stabilendo un'importante disuguaglianza valida per le funzioni convesse.

TEOREMA 2.48 (Disuguaglianza di Jensen).

Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, propria e s.c.i.. Supponiamo che E sia uno spazio misurabile dotato di una misura finita μ. Allora
$$f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s)\right) \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x(s)) \ d\mu(s) \ ,$$
per ogni funzione μ-integrabile $x : E \to X$.

Benché il risultato valga nel caso generale previsto dall'enunciato, noi ci limiteremo, per semplicità, a fare la dimostrazione nell'ulteriore ipotesi in cui si abbia $\partial f(x) \neq \emptyset$, per ogni $x \in X$. Ciò accade, per esempio, qualora $f : X \to \mathbb{R}$ sia continua in X. In particolare, se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, la dimostrazione proposta funziona senza ulteriori ipotesi.

Dimostrazione. Assumiamo $\partial f(x) \neq \emptyset$, per ogni $x \in X$. Allora, $f(y) \geq f(x) + \langle z^*, y - x \rangle$, per ogni $y \in X$, per ogni $x \in X$ e per ogni $z^* \in \partial f(x)$.

Sia $x = \frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s)$ e, fissato $s \in E$, sia $y = x(s)$. Allora
$$f(x(s)) \geq f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s)\right) + \langle z^*, x(s) - \frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s) \rangle$$
per ogni $z^* \in \partial f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s)\right)$. Assumiamo che $\int_E f(x(s)) \ d\mu(s) < +\infty$, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. In tal caso, integrando la precedente disuguaglianza su E e dividendo per la misura di E si ottiene
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x(s)) \ d\mu(s) \geq \\ &f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s)\right) + \langle z^*, \frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s) - \frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s) \rangle = \\ &f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x(s) \ d\mu(s)\right) \ , \end{aligned}$$
cioè la tesi. □

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati in questo capitolo, si rimanda a [6, 7, 8, 11, 14].

CAPITOLO 3

Metodi diretti

In questo capitolo, utilizzando gli strumenti preparati nei capitoli precedenti, ci occuperemo di risolvere il problema

$$\min\{F(u)\ :\ u \in X\}\ , \tag{3.1}$$

dove X è uno spazio di Banach ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato.

Vogliamo stabilire sotto quali ipotesi è possibile ottenere l'esistenza di una (eventualmente unica) soluzione di (3.1). Per i nostri scopi, avremo che in generale X sarà uno spazio funzionale con opportune condizioni al bordo ed F sarà un funzionale integrale. Alcuni classici esempi sono:

ESEMPIO 3.1 Integrale di Dirichlet. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato;

$$X = H_0^1(\Omega) \qquad F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\ .$$

ESEMPIO 3.2 Funzionale dell'area. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato;

$$X = W_0^{1,1}(\Omega) \qquad F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\ dx\ .$$

ESEMPIO 3.3 Funzionale dell'ottica geometrica. Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo reale limitato;

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(I)\ :\ u(a) = u_0\ , u(b) = u_1\} \qquad F(u) = \int_I g(x, u)\sqrt{1 + (u')^2}\ dt\ .$$

Un primo approccio a questo tipo di problemi può essere fatto attraverso i cosiddetti metodi classici (di cui pionieri furono Bernoulli ed Eulero). Essi consistono nel determinare i punti critici $u \in X$ per il funzionale F, cioè i punti tali che $F'(u) = 0$, e poi studiare le derivate successive del funzionale in tali punti per stabilirne la natura. Questi metodi hanno però il difetto di dover assumere una regolarità del funzionale e dei punti critici che in generale potrebbe non essere presente. Un secondo e più recente approccio è stato invece sviluppato a partire dall'inizio del XX secolo da Hilbert e Lebesgue, in connessione con lo studio dell'integrale di Dirichlet. I metodi utilizzati in questo contesto sono stati poi generalizzati da Tonelli e sono attualmente noti come *Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni*. L'approccio con i Metodi Diretti si basa sostanzialmente sul classico Teorema di Weierstrass. Si tratta, cioè, di trovare delle successioni minimizzanti compatte (dalle quali sia quindi possibile estrarre sottosuccessioni convergenti) e sfruttare poi la continuità (o meglio la s.c.i.) del funzionale per ottenere che i punti limite sono in realtà punti di minimo per il funzionale considerato. Osserviamo che compattezza e s.c.i. sono proprietà topologicamente in competizione fra loro, in quanto le proprietà di compattezza si ottengono più facilmente in topologie meno ricche mentre le proprietà di continuità si ottengono più facilmente in topologie più fini. Per tale ragione, è essenziale, una volta assegnati F ed X, scegliere opportunamente la topologia in cui si intende lavorare, per bilanciare le due richieste.

Queste idee conducono all'enunciato del prossimo teorema, al quale premettiamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE 3.4. Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che una successione $\{u_n\} \subseteq X$ è *minimizzante* per il funzionale F su X se

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_X F \ .$$

DEFINIZIONE 3.5. Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ed Y un sottoinsieme illimitato di X. Diremo che F è *coercivo su* Y (o più semplicemente *coercivo*, se $Y = X$), se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\lim_{\substack{\|u\|_X\to+\infty \\ u\in Y}} \frac{F(u)}{\|u\|_X} \geq \alpha > 0 \ . \tag{3.2}$$

TEOREMA 3.6.

Sia X uno spazio di Banach riflessivo ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale coercivo e s.c.i. rispetto alla topologia debole di X. Allora il problema (3.1) ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione. Se $F \equiv +\infty$, ogni punto $u \in X$ è punto di minimo. In caso contrario, si ha $\inf_X F(u) < +\infty$. Allora, se $\{u_n\} \subseteq X$ è una successione minimizzante, esiste $c > 0$ tale che $F(u_n) \leq c$ e, quindi, dalla coercività segue anche che esiste $c' > 0$ tale che $\|u_n\|_X \leq c'$. Pertanto, ogni successione minimizzante è limitata. Poichè lo spazio X è riflessivo, possiamo estrarre una sottosuccessione, che denoteremo ancora con $\{u_n\}$, debolmente convergente ad un punto $\overline{u} \in X$ (vedi Teorema 1.19). Dalla s.c.i. debole di F si ricava allora

$$\inf_X F(u) \leq F(\overline{u}) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_X F(u) \ .$$

Quindi $\overline{u}$ è punto di minimo. $\square$

COROLLARIO 3.7.

Sia X uno spazio di Banach riflessivo, Y un sottoinsieme convesso e chiuso di X ed $F : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale coercivo su Y e s.c.i. rispetto alla topologia debole di X. Allora il problema

$$\min\{F(u) \ : \ u \in Y\} \ ,$$

ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente, osservando che, poiché $\overline{u}$ è limite debole di una successione in Y, allora $\overline{u} \in Y$, in quanto Y, essendo convesso e chiuso, è anche debolmente chiuso. $\square$

Per quanto riguarda l'unicità della soluzione, enunciamo il seguente risultato.

TEOREMA 3.8.

Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale strettamente convesso. Allora il problema (3.1) ammette al più una soluzione.

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che esistano $u, v \in X$, con $u \neq v$, tali che

$$F(u) = F(v) = \min_{w \in X} F(w) \ .$$

Allora, dalla stretta convessità segue

$$F\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) < \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(v) = \min_{w \in X} F(w) \ ,$$

cioè $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ è un punto in cui F raggiunge un valore strettamente inferiore al suo minimo. Questo è assurdo e quindi la tesi è dimostrata. □

Vogliamo ora utilizzare il Teorema 3.6 (o il Corollario 3.7) per ottenere l'esistenza di soluzioni del problema di minimo in alcune situazioni particolarmente significative nelle applicazioni. A tale scopo, considereremo il caso di funzionali integrali definiti su spazi di funzioni sommabili o su spazi di Sobolev. Nel seguito, anche se non sarà esplicitamente ricordato, supporremo sempre che Ω sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ aperto, limitato e con frontiera Lipschitziana.

Il primo caso di cui ci vogliamo occupare è quello di funzionali della forma

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u) \ dx \ , \tag{3.3}$$

dove $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ è una funzione Lebesgue$\times$Borel misurabile nello spazio prodotto $\Omega \times \mathbb{R}^M$ (scriveremo, per semplicità, $f \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}$) ed $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$, $1 \leq p < +\infty$. Osserviamo che in tali ipotesi è garantita la misurabilità della funzione composta $x \in \Omega \mapsto f(x, u(x))$.

TEOREMA 3.9.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-misurabile. Assumiamo che esistano una funzione non negativa $a \in L^1(\Omega)$ e un numero reale $\lambda > 0$ tali che

$$f(x, \xi) \geq -a(x) - \lambda |\xi|^p \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega \ \textit{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^M \ . \tag{3.4}$$

Assumiamo, inoltre, che la funzione $\xi \mapsto f(x, \xi)$ sia s.c.i. su $\mathbb{R}^M$, per quasi ogni $x \in \Omega$. Allora, il funzionale $F : L^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \to \overline{\mathbb{R}}$ definito in (3.3) è s.c.i. nella topologia forte.

Dimostrazione. Siano $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ e $\{u_n\} \subseteq L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ una successione fortemente convergente ad u. Allora dal Teorema 1.28, a meno di estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, possiamo supporre che esista un insieme di misura nulla $N \subset \Omega$ tale che, per ogni $x \in \Omega \setminus N$, $u_n(x) \to u(x)$. Poiché $f(x, \cdot)$ è s.c.i. si ha

$$f(x, u(x)) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x, u_n(x)) \qquad \forall x \in \Omega \setminus N \ . \tag{3.5}$$

Inoltre, da (3.4) e dal Teorema 1.29 (i), si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \liminf_{n \to +\infty} \left[f(x, u_n(x)) + a(x) + \lambda |u_n(x)|^p \right] \ dx \\ \leq &\liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega \left[f(x, u_n(x)) + a(x) + \lambda |u_n(x)|^p \right] \ dx \ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tenendo conto delle proprietà del $\liminf$, dell'ipotesi $a \in L^1(\Omega)$ e del fatto che

$$\begin{aligned}
&|u_n(x)|^p \to |u(x)|^p \qquad \forall x \in \Omega \setminus N \ , \\
&\int_\Omega |u_n(x)|^p \ dx = \|u_n\|_p^p \to \|u\|_p^p = \int_\Omega |u(x)|^p \ dx \ ,
\end{aligned}$$

(vedi Teorema 1.26 (ii)), da (3.5) e (3.6) si ricava

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x,u(x)) \ dx + \int_\Omega a(x) \ dx + \lambda \int_\Omega |u(x)|^p \ dx \\
\le &\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_n(x)) \ dx + \int_\Omega a(x) \ dx + \lambda \int_\Omega |u(x)|^p \ dx
\end{aligned}$$

ovvero

$$F(u) = \int_\Omega f(x,u(x)) \ dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_n(x)) \ dx = \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \ .$$

□

Ricordiamo che, data $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, essa è detta di Carathéodory se

$$\begin{aligned}
&(i) \quad f(\cdot,\xi) \qquad \text{è Lebesgue misurabile per ogni } \xi \in \mathbb{R}^M \ ; \\
&(ii) \quad f(x,\cdot) \qquad \text{è continua per quasi ogni } x \in \Omega \ .
\end{aligned}$$

Osserviamo che se f è di Carathéodory e u è misurabile, la funzione composta $x \in \Omega \mapsto f(x,u(x))$ è anch'essa misurabile.

TEOREMA 3.10.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Assumiamo che esistano una funzione non negativa $a \in L^1(\Omega)$ e un numero reale $\lambda > 0$ tali che

$$|f(x,\xi)| \le a(x) + \lambda|\xi|^p \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega \ \ \textit{e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^M \ . \tag{3.7}$$

Allora, il funzionale $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$ definito in (3.3) è continuo nella topologia forte.

Dimostrazione. Da (3.7) segue che (3.4) vale sia per f che per $-f$, quindi dal Teorema 3.9 si ottiene che F e $-F$ sono entrambi funzionali s.c.i. rispetto alla topologia forte di L^p; cioè, per ogni $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e per ogni $\{u_n\} \subseteq L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $u_n \to u$, si ha

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \qquad \text{e} \qquad -F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} \big[-F(u_n)\big] = -\limsup_{n\to+\infty} F(u_n) \ .$$

Pertanto,

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \le \limsup_{n\to+\infty} F(u_n) \le F(u) \ ,$$

ovvero la tesi. □

Sia $X = W^{1,p}(\Omega)$ o $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$. Consideriamo ora il funzionale $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definito da

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)\, dx \; . \tag{3.8}$$

Sotto opportune ipotesi sull'integranda f, dai teoremi precedenti otteniamo dei risultati di s.c.i. e di continuità per questo funzionale nella topologia forte di X. Siamo ora invece interessati alla debole s.c.i. del precedente funzionale nello spazio X. In tal caso, è possibile dimostrare che condizione necessaria e sufficiente sia per la s.c.i. rispetto alla topologia debole che per la convessità di tale funzionale è la convessità della funzione $f(x, \cdot)$, per quasi ogni $x \in \Omega$.

TEOREMA 3.11.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Assumiamo che esistano una funzione non negativa $a \in L^1(\Omega)$ e un numero reale $\lambda > 0$ tali che

$$|f(x, \xi)| \le a(x) + \lambda |\xi|^p \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega \;\; \textit{e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N \; . \tag{3.9}$$

Sia $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ il funzionale definito in (3.8). Allora le seguenti affermazioni

(i) $f(x, \cdot)$ è convessa per quasi ogni $x \in \Omega$;

(ii) il funzionale F è convesso su $W^{1,p}(\Omega)$;

(iii) il funzionale F è debolmente s.c.i. su $W^{1,p}(\Omega)$;

sono equivalenti.

Dimostrazione. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue da un semplice calcolo. Infatti, assumiamo (i) e siano $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Allora

$$\begin{aligned} F(\alpha u + (1-\alpha) v) &= \int_\Omega f(x, \alpha \nabla u + (1-\alpha) \nabla v)\, dx \\ &\le \int_\Omega [\alpha f(x, \nabla u) + (1-\alpha) f(x, \nabla v)]\, dx = \alpha F(u) + (1-\alpha) F(v) \; , \end{aligned}$$

cioè (ii).

Assumiamo (ii). Dal Teorema 3.10, si ottiene che il funzionale F è continuo (e quindi anche s.c.i.) rispetto alla topologia forte di $W^{1,p}$. Pertanto, essendo anche convesso, dal Teorema 2.16, esso risulta essere s.c.i. rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}$, cioè (iii).

Assumiamo infine che valga (iii) e dimostriamo che $\xi \mapsto f(x, \xi)$ è convessa, cioè (i). A tale scopo, dimostreremo preliminarmente che il funzionale F è convesso sulle funzioni lineari (questo risultato è noto come *Zig-zag Lemma*.) Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, denotiamo con $u_\xi(x)$ la funzione lineare $u_\xi(x) = \xi \cdot x$. Naturalmente, $\nabla u_\xi = \xi$. Siano $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in [0, 1]$, $\xi = \alpha \xi_1 + (1-\alpha) \xi_2$ e $\xi_0 = (\xi_2 - \xi_1)/|\xi_2 - \xi_1|$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$, denotiamo con $\Omega^1_{nj}, \Omega^2_{nj}, \Omega^1_n$ ed Ω^2_n i seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\Omega^1_{nj} = \{x \in \Omega \; : \; \frac{j-1}{n} < \xi_0 \cdot x < \frac{j-1+\alpha}{n}\} \; , \\ &\Omega^2_{nj} = \{x \in \Omega \; : \; \frac{j-1+\alpha}{n} < \xi_0 \cdot x < \frac{j}{n}\} \; , \\ &\Omega^1_n = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \Omega^1_{nj} \qquad \Omega^2_n = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \Omega^2_{nj} \; . \end{aligned}$$

e siano $\chi_{\Omega_n^1}, \chi_{\Omega_n^2}$ le funzioni caratteristiche degli insiemi Ω_n^1 e Ω_n^2, rispettivamente. Osserviamo che, dal Teorema 1.32, $\chi_{\Omega_n^1} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \alpha$ $*$-debolmente in $L^\infty(\Omega)$ e $\chi_{\Omega_n^2} \stackrel{*}{\rightharpoonup} 1-\alpha$ $*$-debolmente in $L^\infty(\Omega)$. Definiamo

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{(j-1)(1-\alpha)}{n}|\xi_2 - \xi_1| + \xi_1 \cdot x & \text{se } x \in \Omega_{nj}^1 \ , \\ \frac{-j\alpha}{n}|\xi_2 - \xi_1| + \xi_2 \cdot x & \text{se } x \in \Omega_{nj}^2 \ . \end{cases} \tag{3.10}$$

Allora, quando $x \in \Omega_{nj}^1$, si ha

$$|u_n(x) - u_\xi(x)| = (1-\alpha)|\xi_2 - \xi_1|| \frac{j-1}{n} - \xi_0 \cdot x| \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}|\xi_2 - \xi_1|$$

e quando $x \in \Omega_{nj}^2$, si ha

$$|u_n(x) - u_\xi(x)| = \alpha|\xi_2 - \xi_1|| \frac{j}{n} - \xi_0 \cdot x| \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}|\xi_2 - \xi_1| \ .$$

Quindi, per $n \to +\infty$, $u_n \to u_\xi$ uniformemente in Ω e $\nabla u_n = \xi_1\chi_{\Omega_n^1} + \xi_2\chi_{\Omega_n^2} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 = \xi = \nabla u_\xi$, $*$-debolmente in $L^\infty(\Omega)$, ovvero $u_n \rightharpoonup u_\xi$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ (e quindi anche fortemente in $L^p(\Omega)$). Poiché le funzioni u_n sono affini a tratti ed F è debolmente s.c.i. in $W^{1,p}(\Omega)$, si ottiene

$$\begin{aligned} F(u_\xi) &\leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x, \nabla u_n) \ dx \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_{\Omega_n^1} f(x, \xi_1) \ dx + \int_{\Omega_n^2} f(x, \xi_2) \ dx \right] \\ &= \alpha \int_\Omega f(x, \xi_1) \ dx + (1-\alpha) \int_\Omega f(x, \xi_2) \ dx = \alpha F(u_{\xi_1}) + (1-\alpha) F(u_{\xi_2}) \ . \end{aligned}$$

Vogliamo ora localizzare la precedente disuguaglianza, cioè mostrare che per ogni aperto $A \subseteq \Omega$, per ogni $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\alpha \in [0,1]$ si ha

$$\int_A f(x, \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2) \ dx \leq \alpha \int_A f(x, \xi_1) \ dx + (1-\alpha) \int_A f(x, \xi_2) \ dx \ . \tag{3.11}$$

Sia quindi $A \subseteq \Omega$, $A' \subset\subset A$ e $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ una funzione cut-off; cioè, tale che

$$0 \leq \phi(x) \leq 1 \quad \text{su } \Omega \ , \qquad \phi(x) = 1 \quad \text{su } A' \ , \qquad \phi(x) = 0 \quad \text{su } \Omega \setminus A \ .$$

Come fatto precedentemente, poniamo $\xi = \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2$. Consideriamo la successione $v_n = \phi u_n + (1-\phi)u_\xi$, dove u_n è definita in (3.10) e $u_\xi = \xi \cdot x$. Chiaramente, per $n \to +\infty$, $v_n \rightharpoonup u_\xi$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ ed inoltre $v_n = u_n$ in A' e $v_n = u_\xi = \xi \cdot x$ in $\Omega \setminus A$. Tenendo conto della s.c.i. del funzionale F, otteniamo

$$\begin{aligned} F(u_\xi) &= \int_A f(x, \xi) \ dx + \int_{\Omega\setminus A} f(x, \xi) \ dx \leq \liminf_{n\to+\infty} F(v_n) \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_{A'} f(x, \nabla u_n) \ dx + \int_{A\setminus A'} f(x, \nabla v_n) \ dx + \int_{\Omega\setminus A} f(x, \xi) \ dx \right] \ , \end{aligned}$$

e quindi, per quanto visto in precedenza,

$$\begin{aligned}\int_A f(x,\xi)\ dx &\le \liminf_{n\to+\infty}\left[\int_{A'\cap\Omega_h^1} f(x,\xi_1)\ dx + \int_{A'\cap\Omega_h^2} f(x,\xi_2)\ dx + \int_{A\setminus A'} f(x,\nabla v_n)\ dx\right]\\ &= \alpha\int_{A'} f(x,\xi_1)\ dx + (1-\alpha)\int_{A'} f(x,\xi_2)\ dx + \liminf_{n\to+\infty}\int_{A\setminus A'} f(x,\nabla v_n)\ dx\ .\end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultimo termine della precedente disuguaglianza si può stimare come segue:

$$\begin{aligned}|\nabla v_n| &\le \phi|\nabla u_n| + (1-\phi)|\xi| + |u_n - u_\xi|\ |\nabla\phi|\\ &\le (|\xi_1| + |\xi_2|) + |u_n - u_\xi|\ |\nabla\phi|\ .\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\int_{A\setminus A'} f(x,\nabla v_n)\ dx &\le \int_{A\setminus A'} a(x)\ dx + \lambda\liminf_{n\to+\infty}\int_{A\setminus A'} |\nabla v_n|^p\ dx\\ &\le \int_{A\setminus A'} a(x)\ dx + c\liminf_{n\to+\infty}\int_{A\setminus A'} [(|\xi_1|+|\xi_2|)^p + |u_n-u_\xi|^p\|\nabla\phi\|_\infty^p]\ dx\\ &= \int_{A\setminus A'} a(x)\ dx + c(|\xi_1|+|\xi_2|)^p|A\setminus A'|\ ,\end{aligned}$$

ovvero

$$\int_A f(x,\xi)\ dx \le \alpha\int_{A'} f(x,\xi_1)\ dx + (1-\alpha)\int_{A'} f(x,\xi_2)\ dx + \int_{A\setminus A'} a(x)\ dx + c(|\xi_1|+|\xi_2|)^p|A\setminus A'|\ .$$

Facendo ora tendere A' ad A e ricordando che $\xi = \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2$, si ottiene la (3.11).

In particolare, (3.11) implica che, per ogni $r > 0$ e per ogni $x \in \Omega$,

$$\int_{B_r(x)} f(y,\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2)\ dy \le \alpha\int_{B_r(x)} f(y,\xi_1)\ dy + (1-\alpha)\int_{B_r(x)} f(y,\xi_2)\ dy\ , \tag{3.12}$$

dove $B_r(x)$ è la sfera di centro x e raggio r, $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in [0,1]$. Ricordiamo che dal Teorema di Lebesgue si ha che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ e per quasi ogni $x \in \Omega$,

$$f(x,\xi) = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B_r(x)} f(y,\xi)\ dy\ . \tag{3.13}$$

Dividendo ambo i membri di (3.12) per $|B_r(x)|$, passando al limite per $r \to 0^+$ e tenendo conto di (3.13), si ottiene che esiste un insieme $N_{\xi_1\xi_2\alpha} \subset \Omega$ di misura nulla tale che

$$f(x,\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2) \le \alpha f(x,\xi_1) + (1-\alpha)f(x,\xi_2) \qquad \text{per ogni } x \in \Omega\setminus N_{\xi_1\xi_2\alpha}. \tag{3.14}$$

Prendendo un famiglia numerabile e densa $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ ed una famiglia numerabile e densa $\mathcal{O} \subset [0,1]$, è possibile costruire un insieme di misura nulla $N \subset \Omega$, tale che (3.14) valga per tutte le coppie $\xi_1,\xi_2 \in \Xi$, per tutti gli $\alpha \in \mathcal{O}$ e per tutti gli $x \in \Omega\setminus N$ (basta definire $N = \cup N_{\xi_1\xi_2\alpha}$, con $\xi_1,\xi_2 \in \Xi$ e $\alpha \in \mathcal{O}$). A questo punto, utilizzando l'ipotesi di continuità della funzione $f(x,\cdot)$ e la densità degli insiemi Ξ e $\mathcal{O}$, si ottiene che la (3.14) vale per ogni $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}^N$, per ogni $\alpha \in [0,1]$ e per quasi ogni $x \in \Omega$. Quindi (i) è dimostrata.

□

OSSERVAZIONE 3.12. Osserviamo che nel precedente teorema l'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) vale anche se la funzione $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è solo $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-misurabile. Infatti, una volta garantita la misurabilità della funzione da integrare, (ii) è conseguenza esclusivamente della convessità della funzione $\xi \mapsto f(x, \xi)$.

A sua volta, l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (iii) vale anche se la condizione (3.9) è rimpiazzata con la più debole richiesta che esistano una funzione non negativa $a \in L^1(\Omega)$ e un numero reale $\lambda > 0$ tali che

$$f(x, \xi) \geq -a(x) - \lambda |\xi|^p \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N \ , \tag{3.15}$$

e se f è una funzione $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-misurabile, convessa o s.c.i. rispetto a ξ. Infatti, nel primo caso, essendo f finita e convessa rispetto a ξ, dal Teorema 2.11 si ottiene subito che f è Carathéodory e quindi, in entrambi i casi, ragionando come nel Teorema 3.9, si ricava che il funzionale F è s.c.i. rispetto alla topologia forte di $W^{1,p}$. Pertanto, da (ii) e dal Teorema 2.16 si ottiene la s.c.i. di F rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}$.

Dai precedenti risultati, siamo ora in grado di ottenere un teorema di esistenza del minimo.

TEOREMA 3.13.

Sia $1 < p < +\infty$ e sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-misurabile. Assumiamo che esistano una funzione non negativa $a \in L^1(\Omega)$ e un numero reale $\lambda > 0$ tali che

$$f(x, \xi) \geq -a(x) + \lambda |\xi|^p \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega \ \textit{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N \ . \tag{3.16}$$

Assumiamo, inoltre, che la funzione $\xi \mapsto f(x, \xi)$ sia convessa, per quasi ogni $x \in \Omega$ e che $F : W_0^{1,p}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ sia il funzionale definito in (3.8). Allora, esiste $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$F(u_0) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} F(u) \ .$$

Dimostrazione. Se $F \equiv +\infty$, tutti i punti di $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono punti di minimo e non c'è nulla da dimostrare. In caso contrario, F risulterà essere un funzionale proprio. Dall'Osservazione 3.12, si ha che il funzionale F è convesso e debolmente s.c.i. su $W^{1,p}(\Omega)$ e quindi su $W_0^{1,p}(\Omega)$, che è uno spazio di Banach riflessivo, poiché $1 < p < +\infty$. Per ottenere l'esistenza di un punto di minimo è, quindi, sufficiente dimostrare la coercività di F su $W_0^{1,p}(\Omega)$ e poi applicare il Teorema 3.6. Osserviamo che dall'ipotesi (3.16) e dalla disuguaglianza di Poincaré (vedi Teorema 1.36) si ottiene

$$\lim_{\|u\|_{1,p} \to +\infty} \frac{F(u)}{\|u\|_{1,p}} \geq \lim_{\|u\|_{1,p} \to +\infty} \frac{-\int_\Omega a(x)\ dx + \lambda \|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{1,p}} \geq c \lim_{\|u\|_{1,p} \to +\infty} \frac{\|u\|_{1,p}^p}{\|u\|_{1,p}} = +\infty \ ;$$

quindi F è coercivo e il teorema è dimostrato. $\square$

ESERCIZIO: Sia $w \in H^1(\Omega)$ una funzione assegnata e sia $Y = w + H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - w \in H_0^1(\Omega)\}$. Dimostrare che il problema di minimo per il funzionale di Dirichlet

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx$$

ammette sempre un'unica soluzione in Y.

Consideriamo ora un caso più generale. Sia $f : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, cioè

$$(i) \quad f(\cdot, s, \xi) \qquad \text{Lebesgue misurabile per ogni } (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \ ;$$

$$(ii) \quad f(x, \cdot, \cdot) \qquad \text{continua per quasi ogni } x \in \Omega \ ;$$

tale che soddisfi le seguenti condizioni di crescita

$$(3.17) \qquad \begin{array}{ll} (C1) \ \ f(x,s,\xi) \geq -a_1(x) + \lambda|\xi|^p & \text{per q.o. } x \in \Omega, \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \ ; \\ (C2) \ \ f(x,s,\xi) \leq a_2(x) + \Lambda|\xi|^p & \text{per q.o. } x \in \Omega, \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \ ; \end{array}$$

con $1 \leq p < +\infty$, $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$ e $a_1, a_2 \in L^1(\Omega)$, funzioni non negative.
Sia $X = W^{1,p}(\Omega)$ o $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Il nostro scopo è quello di studiare il problema di minimo associato al funzionale integrale $F : X \to \mathbb{R}$, definito da

$$(3.18) \qquad F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx \ .$$

OSSERVAZIONE 3.14.

(i) Osserviamo che l'ipotesi $(C1)$ ed il fatto che $1 \leq p < +\infty$ implicano la coercività del funzionale F sullo spazio $X = W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Poiché f è Carathéodory, da (3.17), F risulta essere continua (e quindi anche s.c.i.) rispetto alla topologia forte di X.

(iii) Ricordiamo che, dal Teorema 2.16, ogni funzione convessa s.c.i. nella topologia forte è s.c.i. anche nella topologia debole. Quindi, se F è convesso (e ciò succede, ad esempio, se $f(x,\cdot,\cdot)$ è convessa), il funzionale F risulta essere convesso e quindi s.c.i. nella topologia debole e ad esso è possibile applicare il Teorema 3.6 sull'esistenza del minimo, a patto che $1 < p < +\infty$, cosicché lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ sia riflessivo.

ESERCIZIO: Dimostrare (i) e (ii) dell'Osservazione 3.14.

Osserviamo che, la convessità della funzione integranda rispetto alla variabile s non solo non è una condizione necessaria per la debole s.c.i. del funzionale, ma in generale non sarà neppure verificata (vedi Esempio 3.16). Inoltre, la stessa convessità del funzionale implica solo la convessità della funzione integranda rispetto alla variabile ξ, ma in generale non rispetto ad s (vedi Esempio 3.19). Queste considerazioni permettono di comprendere come mai, per ottenere la debole s.c.i. del nuovo funzionale, non si può procedere come nel Teorema 3.11. Tuttavia, come risulterà dai prossimi teoremi, resterà cruciale la proprietà di convessità della funzione integranda rispetto alla variabile ξ, poiché, come abbiamo visto accadere nel caso in cui non vi sia dipendenza esplicita dalla variabile s (vedi Teorema 3.11), essa sarà una condizione necessaria e sufficiente per ottenere la debole s.c.i. del funzionale integrale associato.

TEOREMA 3.15.

Sia $f : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory soddisfacente (3.17). Sia $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ il funzionale integrale definito in (3.18). Allora, F è s.c.i. rispetto alla topologia debole se e solo se $f(x,s,\cdot)$ è convessa per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 3.16. Sia $F : W^{1,4}(0,1) \to [0,+\infty)$ il funzionale definito in (3.18), dove

$$f(x,s,\xi) = \begin{cases} \xi^4 + (s^2-1)^2 & \text{se } |s| \le 2 \ , \\ \xi^4 + 9 & \text{se } |s| \ge 2 \ . \end{cases}$$

Osserviamo che f è una funzione di Carathéodory, convessa rispetto alla variabile ξ e soddisfacente (3.17) con $p = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 9$ e $\lambda = \Lambda = 1$. Quindi, per il Teorema 3.15, il funzionale F è debolmente s.c.i. in $W^{1,4}(0,1)$. D'altra parte è facile verificare che la funzione integranda non è convessa rispetto ad s.

TEOREMA 3.17.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory soddisfacente (3.17). Sia $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ il funzionale integrale definito in (3.18). Allora, se F è convesso, $f(x,s,\cdot)$ è convessa per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se F è convesso, dall'Osservazione 3.14 si ottiene che esso è anche s.c.i. rispetto alla topologia debole. Pertanto la tesi segue dal Teorema 3.15. □

OSSERVAZIONE 3.18. Osserviamo che la convessità rispetto a ξ della funzione integranda è conseguenza della debole s.c.i. o della convessità del funzionale anche se la condizione (3.17) è sostituita con la più debole condizione

$$|f(x,s,\xi)| \le a(x) + \Lambda|\xi|^p \qquad \text{per q.o } x \in \Omega,\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \ ,\ 1 \le p < +\infty \ , \tag{3.19}$$

dove $a \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa. Inoltre, per ottenere la s.c.i. del funzionale F rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$, è sufficiente che la funzione integranda f sia di Carathéodory, convessa rispetto a ξ e soddisfi la condizione (C1) in (3.17).

ESEMPIO 3.19. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(s,\xi) = g(s)\xi$, con

$$g(s) = \begin{cases} (s^2-1)^2 & \text{se } |s| \le 2 \ , \\ 9 & \text{se } |s| \ge 2 \ . \end{cases}$$

Osserviamo che f è una funzione di Carathéodory soddisfacente (3.19) con $p = 1$, $a = 0$, e $\Lambda = 9$, e lineare rispetto a ξ. Sia $F : W_0^{1,1}(0,1) \to [0,+\infty)$ il funzionale definito in (3.18). Allora

$$F(u) = \int_0^1 g(u)u' \, dx = \int_{u(0)}^{u(1)} g(u) \, du = 0 \qquad \forall u \in W_0^{1,1}(0,1) \ .$$

Quindi F è convesso (in quanto costante), pertanto dal Teorema 3.17 e dall'Osservazione 3.18 si ricava che $f(x,s,\cdot)$ deve essere convessa. In effetti, l'integranda f è lineare e quindi convessa rispetto a ξ, ma si dimostra facilmente che, invece, non è convessa rispetto ad s.

Applichiamo ora i risultati visti al caso del funzionale integrale in (3.18), per ottenere l'esistenza di una soluzione per il problema di minimo associato.

TEOREMA 3.20.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory soddisfacente la condizione $(C1)$ di (3.17). Assumiamo che $f(x,s,\cdot)$ sia convessa per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$. Infine siano $X = W^{1,p}(\Omega)$, $w \in X$, $Y = w + W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ il funzionale definito in (3.18). Allora il problema

$$\min\{F(u) \ : \ u \in Y\}$$

ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione. Se $F \equiv +\infty$ in Y, tutti i punti di Y sono punti di minimo e quindi non c'è nulla da dimostrare. In caso contrario, si ha $\inf_Y F < +\infty$. Vogliamo, allora, applicare il Corollario 3.7. Poiché X è uno spazio di Banach riflessivo, Y è un sottoinsieme convesso e chiuso di X e dal Teorema 3.15, tenendo conto anche dell'Osservazione 3.18, F risulta essere debolmente s.c.i., bisogna solo verificare che F sia coercivo su Y. Dalla condizione ($C1$) di (3.17) si ottiene

$$F(u) \geq -\int_\Omega a_1(x)\ dx + \lambda \|\nabla u\|_p^p \qquad \forall u \in X\ .$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza di Poincaré, si ricava anche che, per ogni $u \in Y$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,p} &\leq \|u-w\|_{1,p} + \|w\|_{1,p} \leq c(\|\nabla u - \nabla w\|_p + \|w\|_{1,p}) \\ &\leq c(\|\nabla u\|_p + \|\nabla w\|_p + \|w\|_{1,p}) \leq \widetilde{c}(\|\nabla u\|_p + 1)\end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{F(u)}{\|u\|_{1,p}} \geq \frac{-\int_\Omega a_1(x)\ dx + \lambda\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{1,p}} \geq \frac{\widetilde{\lambda}_1\|u\|_{1,p}^p - \widetilde{\lambda}_2}{\|u\|_{1,p}} \to +\infty \qquad \text{per} \ \ \|u\|_{1,p} \to +\infty\ .$$

La tesi è quindi dimostrata. □

Consideriamo ora funzionali della forma

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx + \int_\Omega g(x) u\ dx\ , \tag{3.20}$$

dove $u \in H^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Chiaramente questi funzionali non soddisfano l'ipotesi (C1) in (3.17), ma anche per essi è possibile fornire un teorema di esistenza (e unicità) della soluzione del problema di minimo associato.

TEOREMA 3.21.

Siano $X = H^1(\Omega)$, $w \in X$, $Y = w + H_0^1(\Omega)$ ed $F : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito in (3.20). Allora il problema

$$\min\{F(u)\ :\ u \in Y\}$$

ammette un'unica soluzione.

Dimostrazione. L'unicità della soluzione è dovuta alla stretta convessità del funzionale $u \in H^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx$. Per ottenere l'esistenza, vogliamo invece applicare il Corollario 3.7. A tale scopo sarà sufficiente dimostrare la coercività del funzionale, in quanto X è riflessivo, Y è un sottoinsieme convesso e chiuso di X e la s.c.i. di F rispetto alla topologia debole di X è garantita dal Teorema 3.11 per il funzionale convesso $u \in X \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx$, dai Teoremi 1.35 e 3.10 per il funzionale lineare (e quindi convesso) $u \in X \mapsto \int_\Omega g(x) u\ dx$ e dal Teorema 2.8 e dall'Osservazione 2.10 per la somma dei due funzionali.

Dimostriamo quindi che il funzionale F soddisfa (3.2) su Y. Utilizzando la disuguaglianza di Poincaré e ragionando come nella dimostrazione del Teorema 3.20, si ottiene che esiste un $\widetilde{c} > 0$ (dipendente da $\|w\|_{1,2}$ e dalla costante che compare nella disuguaglianza di Poincaré (vedi Teorema 1.36), tale che

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \widetilde{c}(\|\nabla u\|_2^2 + 1) \qquad \forall u \in Y\ .$$

Inoltre, dalla disuguaglianza elementare $AB \le \frac{\delta}{2}A^2 + \frac{1}{2\delta}B^2$, si ha che, per ogni $\delta > 0$,

$$F(u) \ge \|\nabla u\|_2^2 - \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{2\delta}\|g\|_2^2 \ .$$

Pertanto, pur di scegliere δ sufficientemente piccolo in modo tale che $\delta\widetilde{c} < 2$, si ricava

$$F(u) \ge (\widetilde{c})^{-1}\|u\|_{1,2}^2 - \frac{\delta}{2}\|u\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2\delta}\|g\|_2^2 - 1 \ge c_1\|u\|_{1,2}^2 - c_2 \qquad \forall u \in Y$$

dove $c_1, c_2 > 0$ dipendono dalla costante di Poincaré, da $\|w\|_{1,2}$ e da $\|g\|_2$. Quest'ultima disuguaglianza implica la coercività del funzionale su Y e quindi il teorema è dimostrato. $\square$

OSSERVAZIONE 3.22. Tenendo conto della disuguaglianza elementare

$$|AB| \le \frac{\delta^p}{p}|A|^p + \frac{1}{p'\delta^{p'}}|B|^{p'} \qquad \text{con } 1/p + 1/p' = 1 \ ,$$

il precedente risultato (con $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ sostituiti, rispettivamente, da $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$) si può estendere al caso di funzionali $F : W^{1,p}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ della forma

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)\ dx + \int_\Omega g(x)u\ dx \ ,$$

in cui $g \in L^{p'}(\Omega)$ e l'integranda $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sia una funzione di Carathéodory, strettamente convessa rispetto a ξ e soddisfacente la condizione

$$f(x, \xi) \ge -a(x) + \lambda|\xi|^p$$

dove $a \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa e $\lambda > 0$.

In particolare, se $f(x, \cdot)$ è convessa, ma non strettamente convessa, resta valido il risultato di esistenza di un punto di minimo, ma in generale non si avrà unicità.

ESERCIZIO: Dimostrare che per $p \in [1, 2)$ il seguente problema

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left[\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx - \int_\Omega |u|^p\ dx\right]$$

ammette soluzione. Stabilire cosa succede per $p = 2$.

ESERCIZIO: Sia $F : H_0^1(\Omega) \to \overline{R}$ il funzionale definito da

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx - \int_\Omega |u|^p\ dx \ .$$

Verificare che per $p > 2$ l'estremo inferiore di F su $H_0^1(\Omega)$ è sempre pari a $-\infty$. Stabilire se il problema di minimo corrispondente ammette soluzione.

ESERCIZIO: Stabilire per quali valori di $\lambda > 0$ il seguente problema

$$\min_{u \in H_0^1(0,\pi)} \left[\int_0^\pi |u'|^2\ dx - \lambda\int_0^\pi u^2\ dx + \int_0^\pi u\ dx\right]$$

ammette soluzione.

ESERCIZIO: Sia $f \in L^2(\Omega)$. Stabilire se il problema di minimo

$$\min_{H^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega f(x) u \, dx \right\}$$

ammette soluzione.

Come si può ricavare dai prossimi esempi, per garantire l'esistenza di un punto di minimo, non è possibile in generale indebolire l'ipotesi di coercività del funzionale (vedi Esempio 3.23) né quella di convessità dell'integranda rispetto a ξ, che implica la debole s.c.i. del funzionale (vedi Esempi 3.24 e 3.25).

ESEMPIO 3.23. (Mancanza di coercività) Siano $\Omega = (0,1)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definita da $f(x,\xi) = x\xi^2$, $w(x) = 1 - x$ ed $Y = w + H_0^1(0,1)$. Definiamo

$$F(u) = \int_0^1 x(u')^2 \, dx \geq 0 \qquad \forall u \in Y \ .$$

Chiaramente f è convessa rispetto a ξ e soddisfa le condizioni di crescita (3.9) con $p = 2$, $a = 0$ e $\lambda = 1$, quindi dal Teorema 3.11 si ottiene che F è debolmente s.c.i.. Tuttavia, posta

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \ , \\ -\log x / \log n & \text{se } 1/n \leq x \leq 1 \ , \end{cases}$$

è facile verificare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in Y$ e $F(u_n) \to 0$, per $n \to +\infty$. Quindi $\inf F = 0$, ma la condizione $F(u) = 0$ è incompatibile con le condizioni al bordo richieste, quindi il funzionale non ammette punto di minimo.

ESEMPIO 3.24. (Mancanza di s.c.i.) Siano $\Omega = (0,1)$, $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definita da $f(\xi) = (1-\xi^2)^2$ ed $X = W_0^{1,4}(\Omega)$. Definiamo, per ogni $u \in X$,

$$G(u) = \int_0^1 [1 - (u')^2]^2 \, dx \qquad \text{e} \qquad F(u) = G(u) + \int_0^1 u^2 \, dx \ .$$

Chiaramente f soddisfa le condizioni di crescita (3.9) con $p = 4$, $a = 2$ e $\lambda = 2$, ma non è convessa, pertanto il funzionale G (e quindi F) non è s.c.i. rispetto alla topologia debole di X. Inoltre, il problema di minimo per F non ha soluzione, nonostante F sia coercivo. Infatti, si verifica facilmente che $\inf F = 0$, ma $F(u) > 0$ per ogni $u \in X$, poiché $F(u) = 0$ è soddisfatta solo se $u = 0$ e $u' = \pm 1$, che sono condizioni fra loro incompatibili.

ESEMPIO 3.25. (Mancanza di s.c.i.) Siano $\Omega = (0,1)^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ definita da $f(\xi) = (\xi_1^2 - 1)^2 + \xi_2^4$, $X = W_0^{1,4}(\Omega)$ ed $F : X \to [0,+\infty)$ il funzionale definito in (3.8). Si verifica facilmente che il funzionale F non è debolmente s.c.i. su X. Inoltre, nonostante F sia coercivo, il problema di minimo non ammette soluzione. Infatti, si può dimostrare che $\inf_X F = 0$, ma la richiesta $F(u) = 0$ impone che $(\partial_1 u)^2 = 1$ e $\partial_2 u = 0$ e quindi, unitamente alla condizione di annullamento sul bordo di Ω, si ottiene necessariamente $u = 0$ quasi ovunque in Ω, da un lato, e u non costante rispetto alla prima variabile, dall'altro lato. Queste due richieste sono ovviamente incompatibili, quindi $F(u) > 0$ in X e l'estremo inferiore non è mai raggiunto.

ESERCIZIO:

(i) Verificare che il funzionale dell'Esempio 3.23 non è coercivo su Y.

(ii) Dimostrare che il funzionale F dell'esempio 3.24 è coercivo. Determinare delle possibili successioni minimizzanti e verificare che $\inf F = 0$.

(iii) Dimostrare che il funzionale dell'Esempio 3.25 è coercivo, ma non debolmente s.c.i..

ESERCIZIO: Sia $f \in L^2(\Omega)$ ed $X = H^1(\Omega)$. Verificare che il problema di minimo

$$\min_X \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega f(x) u \, dx \right\}$$

non ammette soluzione.

Nel caso in cui il funzionale soddisfi opportune condizioni di differenziabilità, è possibile caratterizzare le eventuali soluzioni del problema (3.1) mediante delle equazioni.

TEOREMA 3.26.

Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato. Assumiamo che esista $\overline{u} \in X$ punto di minimo per F in X e che F sia differenziabile secondo Gâteaux in $\overline{u} \in X$. Allora $\langle dF(\overline{u}), v \rangle = 0$ per ogni $v \in X$, cioè

$$dF(\overline{u}) = 0 \qquad \text{in} \quad X^* \ . \tag{3.21}$$

Dimostrazione. Per ogni $v \in X$, consideriamo la funzione $\phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da $\phi(t) = F(\overline{u} + tv)$. Poiché F è differenziabile secondo Gâteaux in $\overline{u}$, ϕ è derivabile in $t = 0$. Inoltre, poiché $\overline{u}$ è punto di minimo per F, $t = 0$ è punto di minimo per ϕ. Pertanto, dal classico Teorema di Fermat, si ottiene $\phi'(0) = 0$. In altri termini:

$$0 = \phi'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(\overline{u} + tv) - F(\overline{u})}{t} = \langle dF(\overline{u}), v \rangle \ ,$$

per ogni $v \in X$. Il teorema è quindi dimostrato. □

Naturalmente la condizione (3.21) non è in generale sufficiente per avere un punto di minimo (anche nel caso di funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ i punti stazionari, cioè i punti di annullamento della derivata, non sono necessariamente dei punti di minimo). Se però il funzionale F è convesso, allora tale condizione diventa anche sufficiente. Infatti in tal caso, dal Teorema 2.39, si ottiene che $\partial F(u) = \{dF(u)\}$ per ogni $u \in X$ e quindi, se (3.21) è soddisfatta, ne segue che $0 \in \partial F(\overline{u})$. Pertanto, dal Teorema 2.47 si ottiene che $\overline{u}$ è punto di minimo per F in X.

ESEMPIO 3.27. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato e $g \in L^2(\Omega)$. Consideriamo il funzionale $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega g(x) u \, dx \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \ .$$

Dal Teorema 3.21, con $w = 0$, si ottiene subito che F ammette un unico punto di minimo $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Inoltre, F è differenziabile secondo Gâteaux. Pertanto, per determinare l'equazione soddisfatta dal punto di minimo, calcoliamo la derivata di Gâteaux di F, che ci fornirà l'equazione di Eulero associata:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2\,dx + \int_\Omega g(x)(u+tv)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega g(x)u\,dx\right]}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \int_\Omega g(x)v\,dx \\
&= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega g(x)v\,dx = \langle dF(u), v\rangle \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\ ,
\end{aligned}
$$

dove $dF(u) = -\Delta u + g \in H^{-1}(\Omega)$. In particolare, dal Teorema 3.26 segue che $dF(\overline{u}) = 0$, ovvero l'equazione soddisfatta dal punto di minimo $\overline{u}$ è data da

$$
\Delta\overline{u} = g \qquad \text{in } H^{-1}(\Omega)\ .
$$

ESEMPIO 3.28. Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato, $g\in L^2(\Omega)$ e $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$, per $i,j = 1,\dots,N$, tali che $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ per quasi ogni $x\in\Omega$ ed esistano due constanti $0<\lambda\le\Lambda<+\infty$ soddisfacenti

$$
\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \qquad \text{per q.o. } x\in\Omega \text{ e per ogni } \xi\in\mathbb{R}^N\ .
$$

Consideriamo il funzionale $F: H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ definito da

$$
F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u\partial_j u\,dx + \int_\Omega g(x)u\,dx \qquad \forall u\in H_0^1(\Omega)\ .
$$

Dall'Osservazione 3.22, con $p=2$, $f(x,\xi) = a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ e $w=0$, si ottiene subito che F ammette un unico punto di minimo $\overline{u}\in H_0^1(\Omega)$. Inoltre, F è differenziabile secondo Gâteaux. Pertanto, per determinare l'equazione soddisfatta dal punto di minimo, calcoliamo la derivata di Gâteaux di F, che ci fornirà l'equazione di Eulero associata:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i(u+tv)\partial_j(u+tv)\,dx + \int_\Omega g(x)(u+tv)\,dx\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u\partial_j u\,dx + \int_\Omega g(x)u\,dx\right] \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u\partial_j v\,dx + \frac{t}{2}\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i v\partial_j v\,dx + \int_\Omega g(x)v\,dx \\
&= \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u\partial_j v\,dx + \int_\Omega g(x)v\,dx = \langle dF(u), v\rangle \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\ ,
\end{aligned}
$$

dove $dF(u) = -\partial_j\big(a_{ij}(x)\partial_i u\big) + g \in H^{-1}(\Omega)$. In particolare, dal Teorema 3.26 segue che $dF(\overline{u}) = 0$, ovvero l'equazione soddisfatta dal punto di minimo $\overline{u}$ è data da

$$
\partial_j\big(a_{ij}(x)\partial_i\overline{u}\big) = g \qquad \text{in } H^{-1}(\Omega)\ .
$$

Osserviamo che, se le ipotesi del Teorema 3.6 non sono soddisfatte, non si possono applicare i Metodi Diretti ed in effetti, come evidenziato negli Esempi 3.23, 3.24 e 3.25, il problema di minimo può non avere soluzione. D'altre parte, in alcuni casi, pur non potendo affrontare il problema con i Metodi Diretti, il minimo potrebbe esistere comunque. Per esempio, consideriamo il funzionale $F : W_0^{1,4}(0,1) \to [0,+\infty)$ definito da

$$F(u) = \int_0^1 [1-(u')^2]^2\, dx \qquad \forall u \in W_0^{1,4}(0,1)\ .$$

Chiaramente, F non è convesso nè s.c.i., quindi non si può utilizzare il Teorema 3.6 per studiare il problema di minimo corrispondente. Tuttavia, si vede facilmente che esistono infiniti punti di minimo. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $u_n(x) = \frac{1}{n}u(nx)$, $x \in [0,1]$, dove $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1/2\ , \\ 1-x & \text{se } 1/2 \le x \le 1\ , \end{cases}$$

e poi prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Un semplice calcolo mostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in W_0^{1,4}(0,1)$ e $u_n' = \pm 1$. Quindi $F(u_n) = 0$ e, poiché $F(u) \ge 0$, per ogni $u \in W_0^{1,4}(0,1)$, tutte le funzioni u_n sopra definite sono punti di minimo per F.

In situazioni di questo tipo, affinché i Metodi Diretti possano ancora essere efficaci, è necessario *rilassare* il problema, ovvero passare ad un funzionale (e talora ad uno spazio) differente, ottenendo un nuovo problema di minimo (opportunamente legato al problema originario), per il quale ci siano contemporaneamente compattezza delle successioni minimizzanti e s.c.i. del funzionale. Sotto opportune ipotesi, il problema rilassato mantiene dei legami essenziali con il problema originario; in particolare, l'estremo inferiore del problema originario coincide con il minimo del nuovo problema e le successioni minimizzanti del problema originario convergono a punti di minimo del nuovo problema. Pertanto lo studio del problema rilassato fornisce utili informazioni su quello originario.

Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato. Chiamiamo *rilassato* (o inviluppo semicontinuo inferiormente) di F il funzionale $sc^-(F) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definito in (2.7), dove è possibile considerare l'inviluppo rispetto alla topologia forte o debole di X. Nel caso in cui si consideri la topologia forte di X, il rilassato è caratterizzato dalle seguenti due disuguaglianze:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \text{per ogni } u \in X \text{ e per ogni successione } u_n \to u \text{ si ha} \\ &\qquad sc^-(F)(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n)\ ; \\ &(ii) \qquad \text{per ogni } u \in X \text{ esiste una successione } \overline{u}_n \to u \text{ tale che} \\ &\qquad sc^-(F)(u) \ge \limsup_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n)\ . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Tale caratterizzazione vale, più in generale, in uno spazio primo numerabile.

OSSERVAZIONE 3.29. Osserviamo che, come si può facilmente dimostrare, se $G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è un funzionale continuo su X, allora

$$sc^-(F+G) = sc^-(F) + G\ .$$

Il funzionale rilassato è chiaramente s.c.i. ed è il più grande funzionale s.c.i. che minora F. In generale, viene indicato anche con il simbolo $\overline{F}$. Il nostro scopo sarà quello di ottenere una rappresentazione esplicita per il rilassato, quando $X = W^{1,p}(\Omega)$ o $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è un funzionale integrale della forma data in (3.8), cioè

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)\, dx \;,$$

dove $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory. D'altra parte, se f soddisfa la condizione di crescita

$$f(x,\xi) \geq -a(x) - \lambda|\xi|^p \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \;,$$

dove $a \in L^1(\Omega)$ è non negativa, $\lambda > 0$ e $1 \leq p < +\infty$, ragionando come nel Teorema 3.9 si ricava che F è s.c.i. nella topologia forte di X e quindi esso coincide con $\overline{F}$. Pertanto, $\overline{F}$ è completamente identificato e non c'è nulla da dimostrare.

Noi ci concentreremo, perciò, sul problema di rappresentare il funzionale rilassato, quando si considera su X la topologia debole; ovvero, d'ora in avanti, $\overline{F}$ indicherà l'inviluppo s.c.i. di F rispetto alla topologia debole.

Osserviamo che se f soddisfa

$$f(x,\xi) \geq -a(x) + \lambda|\xi|^p \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N \;, \tag{3.23}$$

dove $a \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa, $\lambda > 0$ e $1 < p < +\infty$, allora, anche il rilassato rispetto alla topologia debole di X si può caratterizzare mediante le condizioni (3.22).

Poiché siamo interessati allo studio del problema di minimo e quindi all'applicazione del Teorema 3.6, d'ora in poi considereremo solo il caso in cui $1 < p < \infty$, affinché sia garantita la riflessività dello spazio X.

TEOREMA 3.30.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ una funzione di Carathéodory soddisfacente la condizione di crescita (3.23). Siano $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ il funzionale definito in (3.8). Allora $\overline{F}$ ammette almeno un punto di minimo in X e

$$\inf_{u \in X} F(u) = \min_{u \in X} \overline{F}(u) \;. \tag{3.24}$$

Inoltre, per ogni punto di minimo $u_0 \in X$ di $\overline{F}$, esiste una successione $\{\overline{u}_n\} \subseteq X$ minimizzante per F convergente ad u_0. Infine, se F è proprio, ogni successione minimizzante per F ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di minimo di $\overline{F}$.

Dimostrazione. Se $F \equiv +\infty$, non c'è nulla da dimostrare, in quanto, in tal caso, si ha $\overline{F} \equiv F$. Assumiamo quindi che F sia un funzionale proprio. Dalle condizioni di crescita su f, si ottiene

$$F(u) \geq \overline{F}(u) \geq -\int_\Omega a(x)\, dx + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \qquad \forall u \in X \;.$$

Pertanto, $\overline{F}$, che, per definizione, è debolmente s.c.i., risulta anche essere proprio e coercivo su X, che è uno spazio di Banach riflessivo, in quanto $p > 1$. Quindi, dal Teorema 3.6, segue che esso ammette almeno un punto di minimo in X.

Poiché $\overline{F} \leq F$, si ricava subito che $-\infty < \min_X \overline{F} \leq \inf_X F < +\infty$. Per ottenere la disuguaglianza opposta, osserviamo che, posto $c = \inf_X F < +\infty$, si ha che il funzionale $H : X \to \mathbb{R}$ definito da $H(u) := c$ è debolmente s.c.i. (in quanto costante) e minora F su X, pertanto $c = H(u) \leq \overline{F}(u)$, per ogni $u \in X$. Quindi, in particolare, $c \leq \min_X \overline{F}$; ovvero (3.24) è provata.

Sia ora $u_0 \in X$ punto di minimo per $\overline{F}$ e sia $\{\overline{u}_n\} \subseteq X$ una successione debolmente convergente ad u_0 in X e soddisfacente la condizione (ii) di (3.22). Allora

$$\min_X \overline{F} = \overline{F}(u_0) \geq \limsup_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) \geq \inf_X F \ . \tag{3.25}$$

Da (3.24) e (3.25) segue facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) = \inf_X F \ ;$$

quindi $\{\overline{u}_n\}$ è una successione minimizzante per F.

Infine, sia $\{u_n\} \subseteq X$ una successione minimizzante per F, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_X F \ . \tag{3.26}$$

Dalle condizioni di crescita richieste su f, si ottiene che, a meno di estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, esiste una funzione $u_0 \in X$ tale che $u_n \rightharpoonup u_0$; inoltre, dalla (3.24), (3.26) e (i) di (3.22), abbiamo anche

$$\min_X \overline{F} = \inf_X F = \lim_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \overline{F}(u_0) \geq \min_X \overline{F} \ ;$$

pertanto, u_0 è punto di minimo per $\overline{F}$ su X. □

OSSERVAZIONE 3.31. In realtà, il precedente teorema vale anche in un contesto più generale. Sia, infatti, $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, un funzionale astratto. Assumiamo che X sia uno spazio di Banach riflessivo; $\overline{F}$ sia il rilassato di F rispetto alla topologia debole di X; esista una funzione debolmente s.c.i., propria e coerciva $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $F(u) \geq \Phi(u)$, per ogni $u \in X$. Allora, tenendo conto che, in questo caso, vale ancora la caratterizzazione (3.22) per il rilassato, è possibile ripetere passo passo la dimostrazione del teorema precedente ed ottenere la medesima tesi.

A questo punto, il prossimo passo da compiere è quello di fornire una rappresentazione esplicita per il funzionale $\overline{F}$. A tale scopo, sono necessarie alcune osservazioni preliminari. Siano $f^*(x,\xi)$ ed $f^{**}(x,\xi)$ le funzioni definite da

$$f^*(x,\xi) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} [\xi\cdot\xi^* - f(x,\xi)] \ , \qquad f^{**}(x,\xi) = \sup_{\xi^*\in\mathbb{R}^N} [\xi\cdot\xi^* - f^*(x,\xi^*)] \ , \tag{3.27}$$

ovvero le funzioni polare e bipolare di $f(x,\xi)$ rispetto alla variabile ξ.

OSSERVAZIONE 3.32. Osserviamo che, se f è una funzione di Carathéodory soddisfacente le condizioni di crescita

$$\lambda|\xi|^p \leq f(x,\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1) \qquad \text{per a.e. } x\in\Omega \text{ e } \forall\xi\in\mathbb{R}^N \ , \tag{3.28}$$

dove $0 < \lambda \le \Lambda < +\infty$ e $1 < p < +\infty$, le funzioni $f^*(\cdot, \xi^*)$ ed $f^{**}(\cdot, \xi)$ sono misurabili, per ogni $\xi, \xi^* \in \mathbb{R}^N$. Infatti, passando alla polare, da (3.28), si ottiene che essa soddisfa la disuguaglianza

$$\lambda_1^*|\xi^*|^{p'} - \lambda_2^* \le f^*(x, \xi^*) \le \lambda_3^*|\xi^*|^{p'} \qquad \text{per a.e. } x \in \Omega \text{ e } \forall \xi^* \in \mathbb{R}^N \ ,$$

dove $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^* \in (0, +\infty)$ e $1/p + 1/p' = 1$, ed inoltre, per costruzione, $f^*(x, \cdot)$ è anche convessa. A sua volta, f^{**} soddisfa (3.28) e $f^{**}(x, \cdot)$ è convessa. Pertanto, il Teorema 2.11 implica che $f^*(x, \cdot)$ (rispettivamente, $f^{**}(x, \cdot)$) è continua, per quasi ogni $x \in \Omega$. Quindi in (3.27) ci si può ridurre a fare l'estremo superiore solo su una famiglia numerabile e densa in $\mathbb{R}^N$. Allora, in quanto estremo superiore di una famiglia numerabile di funzioni misurabili, $f^*(\cdot, \xi^*)$ (rispettivamente, $f^{**}(\cdot, \xi)$) è misurabile. In particolare, ciò implica che anche f^* (rispettivamente, f^{**}) è una funzione di Carathéodory, poiché soddisfa le condizioni (i) e (ii) di pag. 44.

LEMMA 3.33 (cfr. [11, Cap. X, Teorema 3.3]).

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ una funzione di Carathéodory soddisfacente le condizioni di crescita (3.28). Siano $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, ed $F : X \to [0, +\infty)$ il funzionale definito in (3.8). Allora, per ogni $u \in X$, esiste una successione di funzioni $\{u_\varepsilon\} \subseteq X$ tale che $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in X e

$$\left| \int_\Omega f(x, \nabla u_\varepsilon)\ dx - \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx \right| \le \varepsilon \ .$$

TEOREMA 3.34.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ una funzione di Carathéodory soddisfacente le condizioni di crescita (3.28). Siano $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, ed $F : X \to [0, +\infty)$ il funzionale definito in (3.8). Allora

$$\overline{F}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx \qquad \forall u \in X \ .$$

Dimostrazione. Sia $u \in X$ e $\{u_\varepsilon\} \subseteq X$ la successione di funzioni ottenuta nel Lemma 3.33. Allora, dalla (3.22), si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{F}(u) &\le \liminf_{\varepsilon \to 0^+} F(u_\varepsilon) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega f(x, \nabla u_\varepsilon)\ dx \\ &\le \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx + \varepsilon \Big] = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx \ , \end{aligned}$$

ovvero

$$\overline{F}(u) \le \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx \qquad \forall u \in X \ . \tag{3.29}$$

D'altra parte, se definiamo $\widetilde{H}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx$, dal Teorema 3.11 si ottiene che $\widetilde{H}$ è convesso e debolmente s.c.i. e quindi, poiché $\widetilde{H} \le F$, si ha $\widetilde{H}(u) \le \overline{F}(u)$, per ogni $u \in X$. Unitamente a (3.29), ciò implica

$$\overline{F}(u) = \widetilde{H}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\ dx \qquad \forall u \in X$$

ed il teorema è dimostrato. $\square$

In particolare, abbiamo ottenuto che $\overline{F}$ è anche convesso.

TEOREMA 3.35.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ *una funzione di Carathéodory soddisfacente le condizioni di crescita (3.28). Siano* $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, *ed* $F : X \to [0, +\infty)$ *il funzionale definito in (3.8). Allora*

$$\overline{F}(u) = F^{**}(u) \qquad \forall u \in X \ .$$

Dimostrazione. Poiché F^{**} è convesso e s.c.i. e dal Teorema 2.27 (i) si ha $F^{**} \leq F$, segue che $F^{**}(u) \leq \overline{F}(u)$, per ogni $u \in X$. Osserviamo che, grazie alle condizioni di crescita (3.28) ed al Teorema 3.34, il funzionale $\overline{F}$ è convesso, s.c.i. e proprio; pertanto, dal Teorema 2.28, si ottiene che $\overline{F}^{**}(u) = \overline{F}(u)$, per ogni $u \in X$. D'altra parte, essendo $\overline{F} \leq F$, si ha $\overline{F}^{**}(u) \leq F^{**}(u)$, per ogni $u \in X$. Pertanto

$$F^{**}(u) \leq \overline{F}(u) = \overline{F}^{**}(u) \leq F^{**}(u) \qquad \text{per ogni } u \in X \ ,$$

ovvero il teorema è provato. □

Nelle ipotesi fatte, abbiamo ottenuto che, se $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$, allora

$$\overline{F}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u) \, dx = F^{**}(u) \qquad \forall u \in X \ , \tag{3.30}$$

ed il problema di minimo per $\overline{F}$ su X ha sempre soluzione. A questo punto, una volta rappresentato esplicitamente il funzionale rilassato e trovati i suoi punti di minimo $\{u_1, u_2, \ldots\}$, si valuta il funzionale F originale in tali punti, che sono gli unici candidati ad essere soluzioni del problema di minimo per F su X. Se risulta che, per qualche indice i, $F(u_i) = \overline{F}(u_i)$, allora u_i è punto di minimo per F su X e quindi si è ottenuta la soluzione del problema di partenza. Se $\overline{F}(u_i) < F(u_i)$ per ogni indice i, allora il problema di minimo per F su X non ha soluzione. In conclusione, utilizzando i Metodi Diretti sul rilassato, almeno in via puramente teorica, si è riusciti a studiare il problema di minimo per F, dove, invece, tali metodi non erano applicabili.

OSSERVAZIONE 3.36. Dai precedenti risultati, si ottiene anche che il rilassato di F o di $co(F)$ sono il medesimo funzionale. Infatti, poiché $co(F) \leq F$, si ricava subito che $\overline{co(F)} \leq \overline{F}$. D'altra parte, poiché $\overline{F} \leq F$ e da (3.30) $\overline{F}$ risulta essere convesso, si ha anche che $\overline{F} \leq co(F)$ e quindi $\overline{F} \leq \overline{co(F)}$; ovvero $\overline{F} = \overline{co(F)}$.

Inoltre, ricordando che f è una funzione di Carathéodory soddisfacente (3.28), si ha che $f^{**} = sc^-\big(co(f)\big) = co(f)$ (vedi Teorema 2.31 e Teorema 2.11), e quindi

$$\overline{F}(u) = \int_\Omega co(f)(x, \nabla u) \, dx \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ .$$

OSSERVAZIONE 3.37. Osserviamo che la formula (3.30) poteva essere ottenuta anche seguendo una strada completamente differente, senza far uso della dualità. A tale scopo si veda [8, Capitoli 3 e 20]. Qui viene dapprima stabilito un risultato di rappresentazione integrale astratto, applicabile al nostro funzionale $\overline{F}$; cioè si dimostra l'esistenza di una funzione $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ boreliana, soddisfacente (3.28) e convessa rispetto a ξ, per quasi ogni $x \in \Omega$, tale che

$$\overline{F}(u) = \int_\Omega g(x, \nabla u)\, dx \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ .$$

Poi, localizzando il funzionale e confrontandolo con il funzionale $u \mapsto \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\, dx$, si ricava che

$$g(x, \xi) = f^{**}(x, \xi) \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

OSSERVAZIONE 3.38. Osserviamo che il risultato di rappresentazione integrale del rilassato non dipende dalle condizioni al bordo. Infatti, se $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ e se definiamo il funzionale $\mathcal{F}_\phi : W^{1,p}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{F}_\phi(u) = \begin{cases} F(u) & \text{se } u \in W_\phi^{1,p}(\Omega)\ ; \\ +\infty & \text{se } u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_\phi^{1,p}(\Omega)\ ; \end{cases}$$

dove $F : W^{1,p}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ è il funzionale definito in (3.8) e $W_\phi^{1,p}(\Omega) = \phi + W_0^{1,p}(\Omega)$, allora, sotto le ipotesi del Teorema 3.34, si ottiene (vedi [8, Chp. 21])

$$\overline{\mathcal{F}}_\phi(u) = \begin{cases} \overline{F}(u) & \text{se } u \in W_\phi^{1,p}(\Omega)\ ; \\ +\infty & \text{se } u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_\phi^{1,p}(\Omega)\ ; \end{cases}$$

ovvero, da (3.30) segue

$$\overline{\mathcal{F}}_\phi(u) = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u)\, dx \qquad \forall u \in W_\phi^{1,p}(\Omega)\ .$$

A questo punto, è naturale chiedersi se e come si possa rappresentare il funzionale polare F^*, in termine della polare $f^*(x, \cdot)$ della funzione integranda. A tale scopo sono necessari alcuni risultati preliminari.

LEMMA 3.39 (cfr. [11, Cap. VIII, Teorema 1.2]).

Sia B un sottoinsieme compatto di R^M e $g : \Omega \times B \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Allora esiste una mappa misurabile $\xi : \Omega \to B$ tale che

$$g(x, \xi(x)) = \max_{\xi \in B} g(x, \xi) \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega\ .$$

Cosideriamo dapprima il caso di funzionali della forma (3.3), cioè dipendenti solo dalla funzione e non dal gradiente.

TEOREMA 3.40.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty)$ *una funzione di Carathéodory soddisfacente le seguenti condizioni di crescita:*

$$\lambda |\xi|^p \leq f(x, \xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p) \qquad \textit{per a.e. } x \in \Omega \textit{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^M \ ,$$

dove $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$ *e* $1 < p < +\infty$. *Sia* $F : L^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \to [0, +\infty)$ *il funzionale definito in (3.3). Allora*

$$F^*(v^*) = \int_\Omega f^*(x, v^*)\ dx \qquad \forall v^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^M) \ ,$$

dove $1/p + 1/p' = 1$.

Dimostrazione. Sia $v^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^M)$; introduciamo le funzioni

$$\begin{aligned} \phi^*(x) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^M} [\xi \cdot v^*(x) - f(x, \xi)] \ ; \\ \phi^*_n(x) &= \max_{|\xi| \leq n} [\xi \cdot v^*(x) - f(x, \xi)] \ . \end{aligned}$$

Ovviamente la successione $\{\phi^*_n(x)\}$ tende in modo monotono crescente a $\phi^*(x)$, per quasi ogni $x \in \Omega$. Inoltre, poiché la funzione $g_n : \Omega \times B_n(0) \to \mathbb{R}$ definita da $g_n(x, \xi) = [\xi \cdot v^*(x) - f(x, \xi)]$ è una funzione di Carathéodory, dal Lemma 3.39, si ha che esiste una mappa misurabile $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}^M$, tale che $\|\xi_n\|_\infty \leq n$ e

$$\phi^*_n(x) = g_n(x, \xi_n(x)) = \xi_n(x) \cdot v^*(x) - f(x, \xi_n(x)) \ .$$

In particolare, ciò implica che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ϕ^*_n (e quindi ϕ^*) è misurabile. Inoltre, fissata una qualunque funzione $u \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$, per ogni $n \geq \|u\|_\infty$, $\phi^*_n(x) - [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u(x))] \geq 0$ e, per le condizioni di crescita richieste su f, la funzione $x \mapsto [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u(x))]$ appartiene ad $L^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Pertanto, dal Teorema 1.29 (ii), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi^*(x)\ dx - \int_\Omega [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u)]\ dx &= \\ \int_\Omega \big(\phi^*(x) - [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u)]\big)\ dx &= \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \big(\phi^*_n(x) - [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u)]\big)\ dx &= \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \phi^*_n(x)\ dx - \int_\Omega [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u)]\ dx & \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_\Omega \phi^*(x)\ dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \phi^*_n(x)\ dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega [\xi_n(x) \cdot v^*(x) - f(x, \xi_n)]\ dx.$$

D'altra parte, poiché $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M) \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$, si ottiene anche

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega [\xi_n(x) \cdot v^*(x) - f(x, \xi_n)]\ dx \leq \sup_{u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)} \int_\Omega [u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u)]\ dx =: F^*(v^*) \ .$$

Poiché $\phi^*(x) = f^*(x, v^*(x))$, per quasi ogni $x \in \Omega$, abbiamo ottenuto che

$$\int_\Omega f^*(x, v^*)\ dx \le F^*(v^*) \qquad \forall v^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^M)\ .$$

Viceversa, per ogni $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ e per quasi ogni $x \in \Omega$, si ha che $[u(x) \cdot v^*(x) - f(x, u(x))] \le \phi^*(x)$; pertanto

$$\int_\Omega [u(x)v^*(x) - f(x, u)]\ dx \le \int_\Omega \phi^*(x)\ dx = \int_\Omega f^*(x, v^*)\ dx\ .$$

Passando all'estremo superiore in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$, si ottiene

$$F^*(v^*) \le \int_\Omega f^*(x, v^*)\ dx \qquad \forall v^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^M)\ ,$$

e quindi il teorema è dimostrato. □

Si tratta ora di vedere come il risultato del Teorema 3.40 si possa riscrivere nel caso in cui il funzionale sia della forma data in (3.8), cioè dipenda dal gradiente di u, anziché dalla funzione stessa. A tale scopo, ricordiamo che lo spazio duale di $W_0^{1,p}(\Omega)$ è $W^{-1,p'}(\Omega)$ e che ogni elemento $u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)$ si può rappresentare come $u^* = -\operatorname{div} p^*$, dove $p^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

TEOREMA 3.41.

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty)$ una funzione di Carathéodory soddisfacente le condizioni di crescita (3.28). Sia $F : W_0^{1,p}(\Omega) \to [0, +\infty)$, $1 < p < +\infty$, il funzionale definito in (3.8). Allora

$$F^*(u^*) = \inf_{\substack{p^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^M) \\ -\operatorname{div} p^* = u^*}} \int_\Omega f^*(x, p^*)\ dx \qquad \forall u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)\ ,$$

dove $1/p + 1/p' = 1$.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che, per ogni $u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e per ogni $p^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tale che $-\operatorname{div} p^* = u^*$, si ottiene

$$\begin{aligned} F^*(u^*) &= \sup_{W_0^{1,p}(\Omega)} \{\langle u^*, u\rangle - F(u)\} = \sup_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega p^*(x) \cdot \nabla u(x)\ dx - \int_\Omega f(x, \nabla u)\ dx \right\} \\ &\le \sup_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)} \left\{ \int_\Omega p^*(x) \cdot v(x)\ dx - \int_\Omega f(x, v)\ dx \right\} = \int_\Omega f^*(x, p^*)\ dx\ , \end{aligned} \tag{3.31}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al Teorema 3.40. Da (3.31) si ottiene, pertanto,

$$F^*(u^*) \le \inf_{\substack{p^* \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N) \\ -\operatorname{div} p^* = u^*}} \int_\Omega f^*(x, p^*)\ dx\ . \tag{3.32}$$

Per ottenere l'altra disuguaglianza procediamo come segue. Consideriamo il funzionale

$$H : L^p(\Omega; R^N) \to [0, +\infty) \qquad \text{definito da} \qquad H(v) = \int_\Omega f^{**}(x, v)\ dx\ ,$$

e l'operatore lineare

$$\mathcal{D} : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega;\mathbb{R}^N) \qquad \text{definito da} \qquad \mathcal{D}(u) = \nabla u \ .$$

Ovviamente si ha che $\mathcal{D}^* : L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ sarà definito da $\mathcal{D}^*(p^*) = -\mathrm{div}\, p^*$, dove la divergenza è intesa nel senso delle distribuzioni. Inoltre, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, si ha $F^{**}(u) = (H \circ \mathcal{D})(u) = H(\mathcal{D}(u))$, e quindi $F^{***}(u^*) = (H \circ \mathcal{D})^*(u^*)$, per ogni $u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Osserviamo anche che per ogni $u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)$, applicando il Teorema 3.6 al funzionale $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto H(\mathcal{D}u) - \langle u^*, u\rangle$, che risulta essere coercivo (per le ipotesi di crescita fatte su f e soddisfatte anche da f^{**}) e debolmente s.c.i., si ricava che esso ammette almeno un punto di minimo $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, cioè

$$H(\mathcal{D}u_0) - \langle u^*, u_0\rangle \le H(\mathcal{D}u) - \langle u^*, u\rangle \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ ,$$

ovvero

$$(H \circ \mathcal{D})(u_0) + \langle u^*, u - u_0\rangle \le (H \circ \mathcal{D})(u) \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ .$$

Ciò implica che $u^* \in \partial(H \circ \mathcal{D})(u_0)$, cioè che ogni elemento di $W^{-1,p'}(\Omega)$ appartiene al sottodifferenziale di $(H \circ \mathcal{D})$ in qualche punto. Tenendo conto di questo fatto, della seguente proprietà

$$\partial(H \circ \mathcal{D})(u) = \mathcal{D}^*\partial H(\mathcal{D}(u)) \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

(cfr. [11, Cap. I, Proposizione 5.7], e del Teorema 2.45, si ricava

$$\begin{aligned}(H \circ \mathcal{D})^*(u^*) + (H \circ \mathcal{D})(u) &= \langle u^*, u\rangle = \langle \mathcal{D}^*p^*, u\rangle \\ &= \langle p^*, \mathcal{D}u\rangle = H^*(p^*) + H(\mathcal{D}u)\end{aligned}$$

per ogni $u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e per ogni $p^* \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, con $-\mathrm{div}\, p^* = u^*$. In altri termini

$$(H \circ \mathcal{D})^*(u^*) = H^*(p^*)$$

per ogni $u^* \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e per ogni $p^* \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ con $-\mathrm{div}\, p^* = u^*$. Pertanto, si ottiene che

$$\begin{aligned}(H \circ \mathcal{D})^*(u^*) &\ge \inf_{\substack{p^* \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \\ -\mathrm{div}\, p^* = u^*}} H^*(p^*) = \inf_{\substack{p^* \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \\ -\mathrm{div}\, p^* = u^*}} \int_\Omega f^{***}(x,p^*)\, dx \\ &= \inf_{\substack{p^* \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \\ -\mathrm{div}\, p^* = u^*}} \int_\Omega f^*(x,p^*)\, dx\end{aligned} \qquad \forall u^* \in W^{-1,p'}(\Omega) \ ,$$

dove la penultima uguaglianza è dovuta al Teorema 3.40 applicato a H e l'ultima uguaglianza è dovuta al Teorema 2.27 (ii). Poiché, sempre dal Teorema 2.27 (ii), si ricava che $F^{***} = F^*$, si ricava finalmente

$$F^*(u^*) = F^{***}(u^*) = (H \circ \mathcal{D})^*(u^*) \ge \inf_{\substack{p^* \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \\ -\mathrm{div}\, p^* = u^*}} \int_\Omega f^*(x,p^*)\, dx \ . \tag{3.33}$$

La tesi segue quindi da (3.32) e (3.33). $\square$

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati in questo capitolo, si rimanda a [2, 4, 5, 7, 8, 10, 11].

Qualora si vogliano studiare funzionali integrali la cui integranda soddisfi ipotesi di crescita lenta, cioè

$$\lambda|\xi| - a_1(x) \le f(x,s,\xi) \le a_2(x) + \Lambda|\xi| \qquad \text{per q.o } x \in \Omega,\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \ ,$$

con $0 < \lambda \le \Lambda < +\infty$ e $a_1, a_2 \in L^1(\Omega)$, funzioni non negative, sembra naturale ambientare il problema di minimo nello spazio di Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$. Purtroppo, però, in questo caso, gli argomenti utilizzati in precedenza non danno i risultati sperati. Consideriamo, infatti, il seguente esempio.

ESEMPIO 3.42. Siano

$$\Omega = (-1,1) \qquad Y = \{u \in W^{1,1}(\Omega)\ :\ u(-1) = 0,\ u(1) = 1\}$$
$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,+\infty) \ \text{ definita da } \ f(x,\xi) = (1+|x|)|\xi|$$
$$F(u) = \int_{-1}^{1} (1+|x|)|u'|\ dx\ .$$

Ovviamente il funzionale F è s.c.i. rispetto alla topologia debole di $W^{1,1}(\Omega)$ e coercivo su Y. Nonostante ciò, non è possibile utilizzare il Corollario 3.7 per ottenere l'esistenza del minimo, in quanto Y è un sottoinsieme convesso e chiuso di $W^{1,1}(\Omega)$, ma $W^{1,1}(\Omega)$ non è uno spazio riflessivo. D'altra parte, si può verificare facilmente che effettivamente il problema di minimo non ammette soluzione. Infatti, per ogni $u \in Y$, si ottiene

$$F(u) \ge \int_{-1}^{1} |u'|\ dx \ge u(1) - u(-1) = 1\ , \tag{3.34}$$

e, posta

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 1\ , \\ n(x+1/n) & \text{se } -1/n < x < 0\ , \\ 0 & \text{se } -1 \le x < -1/n\ , \end{cases}$$

si ha che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in Y$ e

$$F(u_n) = \int_{-1/n}^{0} (1+|x|)n\ dx = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} \to 1\ ,$$

quindi $\inf_Y F = 1$. Tuttavia, se esistesse $u \in X$ tale che $F(u) = 1$, da (3.34) si avrebbe

$$\int_{-1}^{1} (1+|x|)|u'|\ dx = \int_{-1}^{1} |u'|\ dx\ ,$$

cioè $(1+|x|)|u'| = |u'|$ quasi ovunque in $(-1,1)$ e quindi $u' = 0$ quasi ovunque in $(-1,1)$. Poiché in una dimensione, le funzioni di $W^{1,1}$ sono assolutamente continue, si ottiene $u = \textit{costante}$ in $[-1,1]$, che contraddice le condizioni al bordo richieste. Pertanto, F non ammette minimo su Y.

Il problema fondamentale nel precedente esempio è che, non essendo $W^{1,1}(\Omega)$ uno spazio riflessivo, la condizione (3.2) non è più sufficiente per garantire la compattezza delle successioni minimizzanti. Un risultato di compattezza che può venire in aiuto in questo caso è il Teorema di Rellich-Kondrachov per BV, che afferma che da una successione limitata in $W^{1,1}(\Omega)$ è possibile estrarre una sottosuccessione che converge forte in $L^1(\Omega)$ ad una funzione $u \in BV(\Omega)$ ed i cui gradienti convergono *-debole nel senso delle misure a Du. Pertanto, per recuperare la compattezza, sembra naturale estendere il funzionale F di partenza all'intero spazio $BV(\Omega)$, considerando il nuovo funzionale

$$\widetilde{F}(u) = \begin{cases} F(u) & \text{se } u \in W^{1,1}(\Omega) \ , \\ +\infty & \text{se } u \in BV(\Omega) \setminus W^{1,1}(\Omega) \ , \end{cases}$$

in modo tale che

$$\inf_{W^{1,1}(\Omega)} F(u) = \inf_{BV(\Omega)} \widetilde{F}(u) \ .$$

Così facendo, però, si perde la s.c.i., in quanto $W^{1,1}(\Omega)$ è denso in $BV(\Omega)$. Quindi, come in precedenza, se si vogliono utilizzare i Metodi Diretti, si deve nuovamente ricorrere al rilassamento. Questo fatto apre la strada ad un importante e vasto filone di ricerca che riguarda problemi di s.c.i., rilassamento e rappresentazione integrale in BV, ma che esula dagli scopi di questo corso.

Per ulteriori approfondimenti su tale argomento si rimanda a [4, 9, 12, 13].

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Adams: Sobolev spaces. *Academic Press, New York, (1975).*

[2] A. Braides: Γ-convergence for beginners. *Oxford University Press, New York, (2002).*

[3] H. Brezis: Analyse fonctionelle. *Masson, Paris, (1983).*

[4] G. Buttazzo: Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations. *Pitman, Longman, Harlow, (1989).*

[5] G. Buttazzo, G. Dal Maso, E. De Giorgi: Calcolo delle variazioni. *Enciclopedia del Novecento, vol. XI, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1998, pp. 833–848.*

[6] C. Castaing, M. Valadier: Convex analysis and measurable multifunctions. *Springer, Berlin, (1977).*

[7] B. Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations. *Springer, Berlin, (1982).*

[8] G. Dal Maso: An introduction to Γ-convergence. *Birkhäuser, Boston, (1993).*

[9] G. Dal Maso: *Integral representation on $BV(\Omega)$ of Γ-limits of variational integrals.* Manuscripta Math., vol. 30, 1980, pp. 387–416.

[10] G. Dal Maso: Problemi di semicontinuità e rilassamento nel calcolo delle variazioni. *Appunti raccolti da A. Garroni e A. Malusa, pubblicazioni S.I.S.S.A. 118/M (1993).*

[11] I. Ekeland, R. Temam: Analyse convexe et problèmes variationnels. *Dunod, Paris, (1974) (Traduzione inglese: North-Holland (1976)).*

[12] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček: *Functionals with linear growth in the calculus of variations. I.* Comment. Math. Univ. Carolinae, vol. 20, 1979, pp. 143–156.

[13] C. Goffman, J. Serrin: *Sublinear functions of measures and variational integrals.* Duke Math. J., vol. 31, 1964, pp. 159–178.

[14] R.T. Rockafellar: Convex Analysis. *Princeton University Press, (1970).*