Introduzione alla teoria dei punti critici[1]

Prof. Marco Degiovanni

1 Introduzione

Il Calcolo delle variazioni ha conosciuto un notevole sviluppo nel XX secolo, in seguito all'avanzamento delle ricerche in diversi campi, fra cui quello degli spazi funzionali e quello della teoria della misura.

Una fondamentale area di applicazione dei metodi variazionali è costituita dalla Fisica moderna, che è retta, come è noto, da principi variazionali. In particolare, ci soffermiamo qui sulla Meccanica quantistica non relativistica, che è governata dall'equazione di Schrödinger

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta_x\psi(x,t) + U(x,t)\,\psi(x,t)\,, \tag{1.1}$$

dove $\hbar = (6.6262/2\pi)\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{sec}$ è la costante di Planck, $m > 0$ è la massa della particella il cui moto viene descritto e $U : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'energia potenziale della forza conservativa a cui la particella è soggetta. L'incognita, che descrive il moto della particella stessa, è la funzione $\psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Nell'interpretazione canonica, $|\psi|^2$ rappresenta, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la densità di probabilità di trovare la particella in un dato $x \in \mathbb{R}^N$. Pertanto viene di regola imposta la condizione di normalizzazione

$$\int |\psi(x,t)|^2\,dx = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2}$$

(nel seguito, salvo indicazione diversa, gli integrali saranno sempre estesi a tutto $\mathbb{R}^N$).

[1]Appunti del minicorso tenuto dal Prof.Marco Degiovanni, presso il Dipartimento Me.Mo.Mat. dell'Università "La Sapienza" di Roma, nel gennaio 2004, raccolti dai dottorandi: Dott.Emiliano Cristiani, Dott.Giulia Maroscia, Dott.Cristian Spitoni, Dott.Elisa Vacca.

Possiamo anche riscrivere la (1.1) nella forma

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\,\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{m}{m_e}\right)^{-1}\Delta_x\psi(x,t) + U(x,t)\,\psi(x,t)\,,$$

dove $m_e = 0.911\cdot 10^{-30}$ Kg è la massa dell'elettrone a riposo.

Così come la Meccanica newtoniana può essere ottenuta come caso limite della Meccanica relativistica, allorché il rapporto v/c fra la velocità v della particella e la velocità c della luce tende a 0, la stessa Meccanica newtoniana dovrebbe essere ottenuta come caso limite della Meccanica quantistica non relativistica, allorché il rapporto m/m_e tende a $+\infty$.

Vediamo un possibile percorso in tale direzione: limitiamoci a considerare soluzioni con $\psi(x,t)\neq 0$ per ogni $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ e scriviamo l'incognita ψ nella forma

$$\psi(x,t) = u(x,t)\exp(i\varphi(x,t))$$

con $u:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ e $\varphi:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. L'equazione (1.1) e la condizione di normalizzazione (1.2) si trasformano allora nel sistema

$$\begin{cases} m\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\,\dfrac{\hbar}{2}\,u(x,t)\,\Delta_x\varphi(x,t) - \hbar\,\nabla_x u(x,t)\cdot\nabla_x\varphi(x,t)\,,\\[2mm] \hbar\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\hbar^2}{2m}\,\dfrac{\Delta_x u(x,t)}{u(x,t)} - \dfrac{\hbar^2}{2m}\,|\nabla_x\varphi(x,t)|^2 - U(x,t)\,,\\[2mm] \displaystyle\int u(x,t)^2\,dx = 1 \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Se poniamo infine

$$\varrho(x,t) = m\,u(x,t)^2\,,\qquad \mathbf{v}(x,t) = \frac{\hbar}{m}\,\nabla_x\varphi(x,t)$$

ed applichiamo ∇_x alla seconda equazione, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varrho}{\partial t}(x,t) + \mathrm{div}_x\Big(\varrho(x,t)\,\mathbf{v}(x,t)\Big) = 0\,,\\[2mm] m\left(\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}(x,t) + [\nabla_x\mathbf{v}(x,t)]\,\mathbf{v}(x,t)\right) = -\nabla_x\left(U(x,t) - \dfrac{\hbar^2}{2m}\,\dfrac{\Delta_x\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}(x,t)\right),\\[2mm] \displaystyle\int\varrho(x,t)\,dx = m \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Il sistema (1.4) descrive, in forma euleriana, l'evoluzione di un fluido di massa totale m, densità ϱ e campo delle velocità $\mathbf{v}$. In particolare, la prima equazione di (1.4) rappresenta l'equazione di continuità, mentre la terza è evidente. Per la seconda, occorre ricordare che

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x,t) + [\nabla_x \mathbf{v}(x,t)]\,\mathbf{v}(x,t)$$

rappresenta, in forma euleriana, il campo delle accelerazioni. Si tratta quindi dell'usuale equazione del moto, allorché il fluido è soggetto ad un campo di forze conservativo derivante da un'energia potenziale costituita da un contributo esterno U ed uno di interazione fra le particelle del fluido

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\Delta_x\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\,.$$

Supponiamo ora che, per $m/m_e \to +\infty$, il fluido esibisca un fenomeno di concentrazione su una traiettoria $\mathbf{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, nel senso che $\varrho(\cdot,t)/m$ tende alla delta di Dirac in $\mathbf{q}(t)$. Più precisamente, supponiamo di avere una famiglia (ψ_m) di soluzioni di (1.1) e supponiamo che esistano $\mathbf{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ continua e $\mathbf{v}:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ di classe C^1 tali che

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\int\!\!\int \vartheta(x,t)\,\frac{\varrho_m(x,t)}{m}\,dxdt = \int \vartheta(\mathbf{q}(t),t)\,dt \qquad && \forall \vartheta\in C_c(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R})\,,\\
&\lim_{m\to+\infty}\mathbf{v}_m = \mathbf{v} && \text{in } C^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R};\mathbb{R}^N)\,,
\end{aligned}$$

dove ϱ_m e $\mathbf{v}_m$ sono costruite a partire da ψ_m nel modo già indicato. In particolare, per ogni $\alpha\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ esiste $\mathbf{w}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ tale che $\mathbf{w}(x)=x$ su un aperto contenente $\mathbf{q}(\mathrm{supt}(\alpha))$. Dall'equazione di continuità scritta in forma debole e testata su $\alpha(t)\mathbf{w}(x)$ segue allora che

$$\int\!\!\int \frac{\varrho_m(x,t)}{m}\,\alpha'(t)\mathbf{w}(x) + \alpha(t)\,\frac{\varrho_m(x,t)}{m}\,[\nabla\mathbf{w}(x)]\mathbf{v}_m(x,t)\,dxdt = 0\,.$$

Passando al limite per $m\to+\infty$, si ottiene

$$\int \alpha'(t)\mathbf{w}(\mathbf{q}(t)) + \alpha(t)[\nabla\mathbf{w}(\mathbf{q}(t))]\mathbf{v}(\mathbf{q}(t),t)\,dt = 0\,,$$

ossia

$$\int \alpha'(t)\mathbf{q}(t) + \alpha(t)\mathbf{v}(\mathbf{q}(t), t)\, dt = 0 \qquad \forall \alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,.$$

Risulta quindi anzitutto che $\mathbf{q}$ è di classe C^1 e che

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{v}(\mathbf{q}(t), t)\,.$$

Ne segue che $\mathbf{q}$ è di classe C^2 e che

$$\mathbf{q}''(t) = [\nabla_x \mathbf{v}(\mathbf{q}(t), t)]\, \mathbf{q}'(t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{q}(t), t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{q}(t), t) + [\nabla_x \mathbf{v}(\mathbf{q}(t), t)]\, \mathbf{v}(\mathbf{q}(t), t)\,. \quad (1.5)$$

A sua volta, la seconda equazione del sistema (1.4) può anche essere riscritta come

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x,t) + [\nabla_x \mathbf{v}(x,t)]\, \mathbf{v}(x,t)\right) + \nabla_x \left(\left(\frac{m}{m_e}\right)^{-1} \frac{U(x,t)}{m_e}\right) \\ = \nabla \left(\left(\frac{m}{m_e}\right)^{-2} \frac{\hbar^2}{2m_e^2} \frac{\Delta_x \sqrt{\varrho_m}}{\sqrt{\varrho_m}}(x,t)\right) \\ + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t}(x,t) + [\nabla_x \mathbf{v}(x,t)]\, \mathbf{v}(x,t) - [\nabla_x \mathbf{v}_m(x,t)]\, \mathbf{v}_m(x,t)\right)\,.\end{aligned}$$

Nell'ipotesi che, per $m/m_e \to +\infty$, il membro di destra si possa ritenere trascurabile, l'equazione si riduce a

$$m\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x,t) + [\nabla_x \mathbf{v}(x,t)]\, \mathbf{v}(x,t)\right) + \nabla_x U(x,t) = 0\,.$$

Andando in particolare a valutare per $x = \mathbf{q}(t)$ e tenendo conto della (1.5), si ottiene infine l'equazione della Meccanica newtoniana

$$m\mathbf{q}''(t) + \nabla_x U(\mathbf{q}(t), t) = 0\,. \quad (1.6)$$

In realtà è ben noto (vedi ad esempio [2, 12]) che questo tipo di comportamento al limite delle soluzioni di (1.1) verso quelle di (1.6) non ha luogo in molti casi interessanti. Per questo motivo sono state tentate, e sono tuttora oggetto di ricerca, correzioni non lineari all'equazione di Schrödinger (1.1). Molto studiata è, in particolare, l'equazione di Schrödinger non lineare

$$i\,\hbar\,\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta_x \psi(x,t) + U(x,t)\,\psi(x,t) - \gamma\,|\psi(x,t)|^{p-1}\,\psi(x,t)\,, \quad (1.7)$$

dove $\gamma > 0$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. In questo caso le considerazioni svolte in precedenza si riapplicano tali e quali, ma la seconda equazione del sistema (1.3) diventa

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_x u(x,t)}{u(x,t)} - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla_x \varphi(x,t)|^2 - U(x,t) + \gamma\, |u(x,t)|^{p-1}\,, \tag{1.8}$$

mentre la seconda del sistema (1.4) diventa

$$\begin{aligned} m & \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x,t) + [\nabla_x \mathbf{v}(x,t)]\, \mathbf{v}(x,t) \right) \\ & = -\nabla_x \left(U(x,t) - \frac{\gamma}{m^{\frac{p-1}{2}}} \left(\sqrt{\varrho(x,t)} \right)^{p-1} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_x \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}(x,t) \right) . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Limitiamoci ora, nel caso in cui U sia indipendente da t, allo studio delle configurazioni di equilibrio. Per la (1.6) sono naturalmente quelle con $\mathbf{q}$ costante e corrispondono ai punti $x \in \mathbb{R}^N$ tali che $\nabla U(x) = 0$. Nel caso della (1.7) sono le soluzioni ψ che inducono un campo delle velocità $\mathbf{v}$ identicamente nullo. Dalla definizione di $\mathbf{v}$ segue che φ deve essere indipendente da x, mentre dall'equazione di continuità segue che ϱ, quindi u, deve essere indipendente da t. Allora la (1.8) assume la forma

$$\hbar\, \varphi'(t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta u(x)}{u(x)} - U(x) + \gamma\, |u(x)|^{p-1}\,.$$

Dal momento che il primo membro è indipendente da x ed il secondo da t, deve esistere $E \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} -\hbar\, \varphi'(t) = E\,, \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{\Delta u(x)}{u(x)} + U(x) - \gamma\, |u(x)|^{p-1} = E\,. \end{cases}$$

In conclusione, le configurazioni di equilibrio della (1.7), dette *onde stazionarie* o *standing waves*, hanno la forma

$$\psi(x,t) = u(x) \exp\left(i \left(\varphi_0 - \frac{E}{\hbar}\, t \right) \right)\,,$$

con $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario e $u : \mathbb{R}^N \to]0, +\infty[$ ed $E \in \mathbb{R}$ che soddisfano

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u(x) + (U(x) - E)\, u(x) = \gamma\, |u(x)|^{p-1}\, u(x)\,. \tag{1.10}$$

È bene precisare che l'equazione di Schrödinger, sia lineare che non lineare, è coinvolta nella descrizione di molti fenomeni, a seconda dei quali può anche non essere naturale imporre la condizione di normalizzazione (1.2).

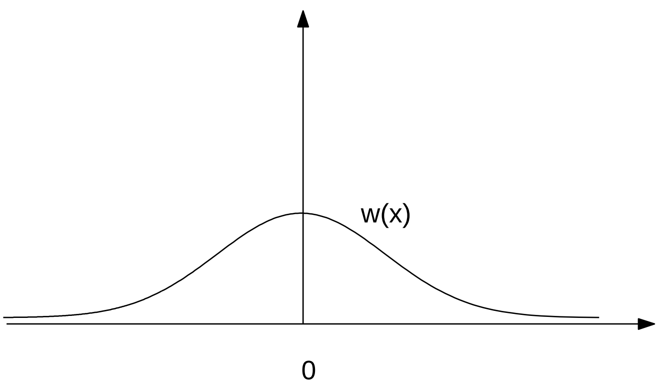
Ad esempio, a partire dallo storico lavoro [4], molti autori hanno studiato il fenomeno di concentrazione per la (1.10) con E assegnato e $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, ma non di norma assegnata. In questo caso, volendo studiare la concentrazione in un certo $x_0 \in \mathbb{R}^N$, è naturale effettuare il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} w(x) &= u\left(x_0 + \left(\frac{m}{m_e}\right)^{-\frac{1}{2}} x\right), \\ u(x) &= w\left(\left(\frac{m}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}} (x - x_0)\right). \end{aligned}$$

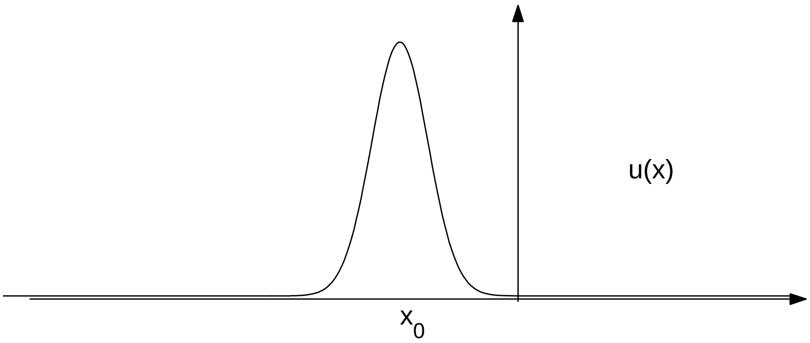
Risulta allora che w, E devono soddisfare

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta w(x) + \left(U\left(x_0 + \left(\frac{m}{m_e}\right)^{-\frac{1}{2}} x\right) - E\right) w(x) = \gamma\, |w(x)|^{p-1} w(x)\,. \tag{1.11}$$

Un aspetto interessante di questo cambiamento di variabile è che l'equazione (1.11) può ammettere soluzioni w che non tendono a comportamenti singolari per $m/m_e \to +\infty$. In vari casi notevoli il grafico di w ha piuttosto un aspetto del tipo



Quando invece si effettua il cambiamento di variabile inverso, si riscontra la concentrazione con un grafico per la u del tipo



Il problema è quindi ricondotto allo studio dell'equazione (1.11). A meno di un'opportuna scelta delle unità di misura, si può anche supporre che $\frac{\hbar^2}{2m_e} = 1$ (si intende che anche i valori di U, E e γ cambieranno, cambiando unità di misura).

In conclusione, chiamando ancora l'incognita u anziché w e ponendo

$$V_\mu(x) = U\left(x_0 + \mu\, x\right) - E\,, \qquad \mu = \left(\frac{m}{m_e}\right)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

si tratta di studiare l'equazione

$$-\Delta u(x) + V_\mu(x)\, u(x) \;=\; \gamma\, |u(x)|^{p-1} u(x) \tag{1.12}$$

per $\mu \to 0^+$.

Come primo approccio ai metodi variazionali, noi non considereremo problemi asintotici, ma ci limiteremo a cercare soluzioni positive u della (1.12) con μ assegnato. Scriveremo quindi semplicemente V anziché V_μ.

Ci metteremo nel caso, considerato in [9], in cui $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è continua e soddisfa

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty\,, \tag{1.13}$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > 0\,. \tag{1.14}$$

Rispetto al problema originario, questo equivale a supporre che $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sia continua e che si abbia

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = +\infty\,,$$

$$E < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} U(x)\,.$$

In un'opportuna ambientazione funzionale, la (1.12) risulta essere l'equazione di Eulero del funzionale di classe C^2

$$f(u) \;=\; \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int V\,u^2\,dx - \frac{\gamma}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx\,.$$

In particolare, u è soluzione di (1.12) se è solo se u è un punto critico di f.

Poiché risulta

$$\lim_{t\to+\infty} f(tu) = -\infty$$

per ogni u che non sia nulla q.o., il funzionale f non è limitato inferiormente. Risulta quindi impossibile trovare una soluzione della (1.12) cercando un minimo assoluto per f.

D'altra parte risulta

$$\langle f'(u), v\rangle = \int \big(\nabla u\cdot\nabla v + Vuv - \gamma|u|^{p-1}uv\big)\,dx\,,$$

$$\langle f''(u)v, v\rangle = \int \big(|\nabla v|^2 + Vv^2 - \gamma p|u|^{p-1}v^2\big)\,dx\,.$$

In particolare, se u è un punto critico per f, si ha $\langle f'(u), u\rangle = 0$, quindi

$$\langle f''(u)u, u\rangle = -\gamma\,(p-1)\int |u|^{p+1}\,dx\,.$$

Pertanto, se u è un punto critico per f che non sia nullo q.o., si ha che u non può essere un punto di minimo nemmeno locale. D'altra parte, a causa della parte principale $\frac{1}{2}\int \nabla u|^2 dx$, il funzionale f non ammette nemmeno massimi locali. In questo caso è quindi necessario cercare le soluzioni della (1.12) fra i punti critici del funzionale che non siano né massimi né minimi locali.

2 Teoria dei punti critici

Forniamo in questa sezione alcuni elementi essenziali di teoria dei punti critici.

Sia X uno spazio di Banach reale e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Per ogni $b \in \mathbb{R}$, poniamo

$$f^b := \{u \in X :\; f(u) \le b\}\,.$$

Definizione 2.1. Diciamo che $u \in X$ è *un punto critico* per f, se $f'(u) = 0$. Diciamo che $c \in \mathbb{R}$ è *un valore critico* per f, se esiste un punto critico u per f tale che $f(u) = c$. Diciamo che $c \in \mathbb{R}$ è *un valore regolare* per f, se non è un valore critico per f.

2.1 Il teorema di deformazione

Uno strumento tecnico fondamentale in teoria dei punti critici è costituito dal seguente risultato di deformazione (si veda ad esempio [8]).

Teorema 2.2 (Noncritical Interval Theorem). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se*

$$\inf \left\{ \|f'(u)\| : \quad u \in X,\, a \leq f(u) \leq b \right\} \; > \; 0\,,$$

allora esiste un'applicazione continua $\mathcal{H} : f^b \times [0,1] \to f^b$ tale che

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(u,0) = u, &&\forall u \in f^b\,, \\ &\mathcal{H}(u,1) \in f^a, &&\forall u \in f^b\,, \\ &\mathcal{H}(u,t) = u, &&\forall u \in f^a,\, \forall t \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi in cui f sia di classe C^2, o più in generale con f' localmente lipschitziano, e X sia uno spazio di Hilbert, l'applicazione $\mathcal{H}$ può essere costruita a partire dal flusso generato dall'equazione di evoluzione

$$\eta'(t) = -\frac{\nabla f(\eta(t))}{\|\nabla f(\eta(t))\|^2}\,.$$

Il caso generale segue la medesima falsariga, ma presenta alcune complicazioni tecniche.

Definizione 2.3. Dato $u \in X$, diciamo che $v \in X$ è *un vettore pseudogradiente* per f in u, se $\|v\| \leq 2\|f'(u)\|$ e $\langle f'(u), v\rangle \geq \|f'(u)\|^2$.

Diciamo che

$$V : \{u \in X : \; f'(u) \neq 0\} \longrightarrow X$$

è *un campo pseudogradiente* per f, se V è localmente lipschitziano e $V(u)$ è un vettore pseudogradiente per f in u per ogni $u \in X$ con $f'(u) \neq 0$.

Osservazione 2.4. Se v è un vettore pseudogradiente per f in u, risulta

$$\|f'(u)\|^2 \leq \langle f'(u), v\rangle \leq \|f'(u)\|\|v\|\,,$$

da cui $\|f'(u)\| \leq \|v\|$.

Lemma 2.5. *Sia Y uno spazio metrico, Z uno spazio normato e, per ogni $y \in Y$, sia $\mathcal{F}(y)$ un sottoinsieme convesso di Z. Supponiamo che, per ogni $y \in Y$, esista un intorno U di y tale che*

$$\bigcap_{\xi\in U} \mathcal{F}(\xi) \neq \emptyset\,.$$

Allora esiste un'applicazione localmente lipschitziana $F : Y \to Z$ tale che $F(y) \in \mathcal{F}(y)$ per ogni $y \in Y$.

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$, sia U_y un intorno aperto di y tale che

$$\bigcap_{\xi\in U_y} \mathcal{F}(\xi) \neq \emptyset\,.$$

Essendo $\{U_y : y \in Y\}$ un ricoprimento aperto di Y ed essendo Y paracompatto (vedi ad esempio [6]), esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{W_j : j \in J\}$ di Y che raffina $\{U_y : y \in Y\}$. Se poniamo

$$\psi_j(y) = \begin{cases} d(y, Y \setminus W_j) & \text{se } W_j \neq Y\,, \\ 1 & \text{se } W_j = Y\,, \end{cases}$$

$$\Psi(y) = \sum_{j\in J} \psi_j(y)\,,$$

si ha che ψ_j è lipschitziana e Ψ è ben definita e localmente lipschitziana, dal momento che $\{W_j : j \in J\}$ è localmente finito. Poiché $\{W_j : j \in J\}$ è un ricoprimento aperto, risulta anche $\Psi(y) \neq 0$ per ogni $y \in Y$. Pertanto, se poniamo

$$\varphi_j(y) = \frac{\psi_j(y)}{\Psi(y)}\,,$$

si ha che $\{\varphi_j : j \in J\}$ è una partizione localmente lipschitziana dell'unità subordinata a $\{W_j : j \in J\}$.

Dal momento che $\{W_j : j \in J\}$ raffina $\{U_y : y \in Y\}$, per ogni $j \in J$ si ha

$$\bigcap_{\xi \in W_j} \mathcal{F}(\xi) \neq \emptyset\,.$$

Se per ogni $j \in J$ scegliamo $z_j \in \bigcap\limits_{\xi \in W_j} \mathcal{F}(\xi)$, possiamo definire un'applicazione localmente lipschitziana $F : Y \to Z$ ponendo

$$F(y) = \sum_{j \in J} \varphi_j(y)\, z_j\,.$$

Dato $y \in Y$, esiste solo un numero finito $W_{j_1}, \ldots, W_{j_n}$ di W_j tali che $y \in W_j$. Allora

$$F(y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{j_k}(y)\, z_{j_k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \varphi_{j_k}(y) = 1\,.$$

Per ogni $k = 1, \ldots, n$, da $y \in W_{j_k}$ segue che $z_{j_k} \in \mathcal{F}(y)$. Poiché $\mathcal{F}(y)$ è convesso, si conclude che $F(y) \in \mathcal{F}(y)$. $\square$

Teorema 2.6. *Esiste un campo pseudogradiente per f.*

Dimostrazione. Sia

$$Y = \{u \in X : \ f'(u) \neq 0\}\,.$$

Per ogni $u \in Y$, sia $\mathcal{V}(u)$ l'insieme dei vettori pseudogradienti per f in u. Si verifica facilmente che $\mathcal{V}(u)$ è un sottoinsieme convesso di X. Inoltre, per ogni $u \in Y$ esiste $w \in X$ tale che $\|w\| \leq 1$ e $\langle f'(u), w\rangle \geq \frac{4}{5}\|f'(u)\|$. Allora $v = \frac{5}{3}\|f'(u)\|\, w$ soddisfa $\|v\| \leq \frac{5}{3}\|f'(u)\|$ e $\langle f'(u), v\rangle \geq \frac{4}{3}\|f'(u)\|^2$. Essendo f di classe C^1, esiste un intorno U di u tale che $\|v\| < 2\,\|f'(\xi)\|$ e $\langle f'(\xi), v\rangle > \|f'(\xi)\|^2$ per ogni $\xi \in U$, per cui

$$v \in \bigcap_{\xi \in U} \mathcal{V}(\xi)\,.$$

Dal Lemma 2.5 si deduce che esiste un'applicazione localmente lipschitziana $V : Y \to X$ con $V(u) \in \mathcal{V}(u)$, da cui la tesi. $\square$

Dimostrazione del Teorema 2.2. Sia $\sigma > 0$ tale che

$$a \leq f(u) \leq b \Longrightarrow \|f'(u)\| \geq \sigma \tag{2.1}$$

e sia V un campo pseudogradiente per f.

Sia $\chi : X \to [0,1]$ una funzione localmente lipschitziana tale che

$$\|f'(u)\| \leq \frac{\sigma}{2} \Longrightarrow \chi(u) = 0\,,$$
$$\|f'(u)\| \geq \sigma \Longrightarrow \chi(u) = 1\,,$$

e sia $W : X \to X$ definita da

$$W(u) = \begin{cases} \chi(u)\,\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|^2} & \text{se } \|f'(u)\| > \frac{\sigma}{2}\,, \\[2ex] 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Allora, tenuto conto dell'Osservazione 2.4, risulta che $W : X \to X$ è un'applicazione localmente lipschitziana. Inoltre, per ogni u con $\|f'(u)\| > \frac{\sigma}{2}$ si ha

$$\|W(u)\| \leq \frac{1}{\|V(u)\|} \leq \frac{1}{\|f'(u)\|} \leq \frac{2}{\sigma}\,,$$

da cui

$$\forall u \in X : \quad \|W(u)\| \leq \frac{2}{\sigma}\,. \tag{2.2}$$

Ne segue che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t}(u,t) & = & -W(\eta(u,t)) \\[2ex] \eta(u,0) & = & u \end{cases}$$

definisce un'applicazione continua $\eta : X \times \mathbb{R} \to X$. Inoltre, per ogni u, t con $a \leq f(\eta(u,t)) \leq b$ risulta

$$\frac{d}{dt}\, f(\eta(u,t)) = \langle f'(\eta(u,t)), -W(\eta(u,t))\rangle = -\frac{\langle f'(\eta(u,t)), V(\eta(u,t))\rangle}{\|V(\eta(u,t))\|^2} \leq -\frac{1}{4}\,. \tag{2.3}$$

Pertanto, per ogni u con $a \leq f(u) \leq b$, esiste uno ed un solo $T(u) \geq 0$ tale che $f(\eta(u, T(u))) = a$ e T è una funzione continua di u. Se si pone

$$\mathcal{H}(u,t) = \begin{cases} \eta(u, tT(u)) & \text{se } a \leq f(u) \leq b\,, \\ u & \text{se } f(u) \leq a\,, \end{cases}$$

si verifica facilmente che $\mathcal{H}$ ha i requisiti richiesti. □

2.2 Il teorema del passo di montagna

Possiamo ora dimostrare un importante teorema (vedi [1, 8]), che ci consente di trovare punti critici senza che debbano essere punti di massimo o minimo locali.

Teorema 2.7 (del passo di montagna). *Supponiamo che esistano due elementi $u_0, u_1 \in X$ che verificano la seguente ipotesi geometrica*

$$c := \inf \left\{ \max_{t\in[0,1]} f(\varphi(t)) : \quad \varphi \in C([0,1]; X), \right. \\ \left. \varphi(0) = u_0,\, \varphi(1) = u_1 \right\} > \max\{f(u_0), f(u_1)\}\ . \tag{2.4}$$

Allora esiste una successione (v_n) in X tale che $f'(v_n) \to 0$ in X^* e $f(v_n) \to c$ in $\mathbb{R}$.

Osservazione 2.8. Intuitivamente, l'ipotesi geometrica dice che, lungo qualunque cammino continuo da u_0 a u_1, la "quota" data dal valore di f deve comunque salire fino a un valore maggiore di $f(u_0)$ e di $f(u_1)$, prima di ridiscendere a $f(u_1)$. Questo garantisce, se non proprio l'esistenza di un punto di scollinamento alla quota c, almeno di una successione (v_n) di punti "quasi critici" con quota prossima a c.

A questo livello di generalità, non è detto che esista uno specifico punto di sella. Sia, ad esempio, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := (\exp x) - y^2$$

e siano $u_0 = (0, -2)$ e $u_1 = (0, 2)$. Allora l'asse delle x è un crinale che separa u_0 da u_1. Poiché qualunque cammino continuo φ da u_0 a u_1 deve interscare tale crinale, si verifica facilmente che $c = 0 > -3 = f(u_0) = f(u_1)$. D'altra parte è evidente che f non ammette nessun punto critico, mentre $v_n = (-n, 0)$ è una successione conforme alla tesi del Teorema 2.7.

Dimostrazione del Teorema 2.7. Ragioniamo per assurdo. Esiste quindi $\varepsilon > 0$ tale che

$$\inf \left\{ \|f'(u)\| : \quad u \in X,\, c - \varepsilon \le f(u) \le c + \varepsilon \right\} \;>\; 0\,.$$

Infatti, se così non fosse, per ogni $\varepsilon > 0$ avremmo

$$\inf \left\{ \|f'(u)\| : \quad u \in X,\, c - \varepsilon \le f(u) \le c + \varepsilon \right\} \;=\; 0\,.$$

Scegliendo in particolare $\varepsilon = \frac{1}{n}$, troveremmo una successione (v_n) con $\|f'(v_n)\| \le \frac{1}{n}$ e $c - \frac{1}{n} \le f(v_n) \le c + \frac{1}{n}$, quindi conforme alla tesi che stiamo negando per assurdo.

Per l'ipotesi (2.4) si ha $f(u_0) < c$ e $f(u_1) < c$. A meno di rimpicciolire ε, possiamo allora supporre anche $f(u_0) \le c - \varepsilon$ e $f(u_1) \le c - \varepsilon$. Dal Teorema 2.2 si deduce che esiste un'applicazione continua $\mathcal{H} : f^{c+\varepsilon} \times [0,1] \to f^{c+\varepsilon}$ tale che

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(u,0) = u, && \forall u \in f^{c+\varepsilon}\,,\\
&\mathcal{H}(u,1) \in f^{c-\varepsilon}, && \forall u \in f^{c+\varepsilon}\,,\\
&\mathcal{H}(u,t) = u, && \forall u \in f^{c-\varepsilon},\, \forall t \in [0,1]\,.
\end{aligned}$$

Dalla definizione di c come estremo inferiore segue che esiste una curva $\varphi : [0,1] \to X$ continua con $\varphi(0) = u_0$ e $\varphi(1) = u_1$ tale che $\max\limits_{t\in[0,1]} f(\varphi(t)) < c + \varepsilon$, quindi con $\varphi([0,1]) \subseteq f^{c+\varepsilon}$. Allora anche $\psi : [0,1] \to X$ definita da $\psi(t) := \mathcal{H}(\varphi(t), 1)$ è una curva continua tale che $\psi(0) = \mathcal{H}(u_0, 1) = u_0$ e $\psi(1) = \mathcal{H}(u_1, 1) = u_1$. Dalla definizione di c segue che $\max\limits_{t\in[0,1]} f(\psi(t)) \ge c$. D'altra parte $\psi(t) = \mathcal{H}(\phi(t), 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$. Si giunge quindi ad un assurdo e la dimostrazione è completa. $\square$

Per trasformare il Teorema 2.7 in un autentico teorema di punto critico è naturale introdurre una condizione di compattezza che si riallacci alla tesi di quel teorema.

Definizione 2.9. Sia $c \in \mathbb{R}$. Diciamo che f soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c ($(PS)_c$, in breve), se ogni successione (v_n) in X con $f'(v_n) \to 0$ e $f(v_n) \to c$ ammette una sottosuccessione convergente in X.

Diciamo che f soddisfa la condizione di Palais-Smale ((PS), in breve), se soddisfa la $(PS)_c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

A questo punto, come immediata conseguenza del Teorema 2.7, possiamo enunciare la forma classica del Teorema del passo di montagna.

Corollario 2.10. *Supponiamo che esistano $u_0, u_1 \in X$ che soddisfino l'ipotesi geometrica* (2.4) *e supponiamo che f verifichi la $(PS)_c$, dove c è dato dalla* (2.4).

Allora esiste $u \in X$ tale che $f'(u) = 0$ e $f(u) = c$.

3 Operatore di Nemytskij

Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Nel seguito denoteremo con $\| \ \|_p$ la norma canonica di L^p $(1 \leq p \leq \infty)$.

Questa sezione è dedicata a fornire qualche elemento su quelli che sono i più importanti operatori non lineari fra spazi L^p che intervengono nelle equazioni differenziali. Per una trattazione più approfondita, si veda ad esempio [7].

Definizione 3.1. Diciamo che una funzione $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ è *di Carathéodory*, se

(a) per ogni $s \in \mathbb{R}^k$, la funzione $\{x \longmapsto g(x, s)\}$ è misurabile su Ω;

(b) per q.o. $x \in \Omega$, la funzione $\{s \longmapsto g(x, s)\}$ è continua su $\mathbb{R}^k$.

Diciamo inoltre che una funzione $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ è C^1*-Carathéodory*, se soddisfa la (a) e la

(b') per q.o. $x \in \Omega$, la funzione $\{s \longmapsto g(x, s)\}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^k$.

Se $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è una funzione, denotiamo con $g(x,u)$ la funzione

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & g(x,u(x)) \end{array} .$$

Teorema 3.2. *Sia $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ una funzione di Carathéodory.*

Allora per ogni funzione misurabile $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ si ha che la funzione $g(x,u) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è misurabile. Inoltre, se $u = v$ q.o. in Ω, risulta $g(x,u) = g(x,v)$ q.o. in Ω.

Dimostrazione. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione semplice, ossia una funzione misurabile con un numero finito di valori. Se $s_1, \ldots, s_m$ sono i valori distinti di u, sia $E_j = u^{-1}(s_j)$. Allora $\{E_1, \ldots, E_m\}$ è una partizione misurabile di Ω e si ha

$$\forall x \in \Omega : \quad g(x,u(x)) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{E_j}(x)\, g(x,s_j) \ .$$

Pertanto $g(x,u)$ è misurabile.

Sia ora $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione misurabile. È ben noto che esiste una successione (u_n) di funzioni semplici convergente puntualmente q.o. a u (si veda ad esempio [11]). Allora risulta

$$\lim_n g(x,u_n) = g(x,u) \qquad \text{q.o. in } \Omega,$$

da cui la misurabilità di $g(x,u)$.

Infine è evidente che, se $u = v$ q.o. in Ω, allora $g(x,u) = g(x,v)$ q.o. in Ω. $\square$

Teorema 3.3. *Sia $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ una funzione di Carathéodory e siano $p, q \in [1, \infty[$. Si supponga che esistano $a \in L^q(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|g(x,s)| \le a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}} \tag{3.1}$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}^k$.

Allora, per ogni $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$, si ha $g(x,u) \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G} : & L^p(\Omega;\mathbb{R}^k) & \longrightarrow & L^q(\Omega;\mathbb{R}^m) \\ & u & \longmapsto & g(x,u) \end{array}$$

è continua e limitata sui limitati.

Dimostrazione. Per ogni $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ si ha

$$|g(x,u)|^q \le \left(a + b|u|^{\frac{p}{q}}\right)^q \le 2^{q-1}\left(a^q + b^q|u|^p\right) .$$

Combinando questo fatto con il Teorema 3.2, si deduce che $g(x,u) \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e che l'applicazione $\mathcal{G}$ è limitata sui limitati.

Sia ora (u_n) una successione convergente a u in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$. A meno di una sottosuccessione, (u_n) è convergente q.o. a u ed esiste $w \in L^p(\Omega)$ tale che

$$|u_n| \le w \qquad \text{q.o. in } \Omega$$

(si veda ad esempio [3, Teorema IV.9]). Ne segue

$$\lim_n g(x,u_n) = g(x,u) \qquad \text{q.o. in } \Omega,$$

$$\begin{aligned} |g(x,u_n) - g(x,u)|^q &\le 2^{q-1}(|g(x,u_n)|^q + |g(x,u)|^q) \\ &\le 2^{2q-2}\left(2a^q + b^q|u_n|^p + b^q|u|^p\right) \\ &\le 2^{2q-2}\left(2a^q + b^q w^p + b^q|u|^p\right) \qquad \text{q.o. in } \Omega. \end{aligned}$$

Per il Teorema della convergenza dominata, si conclude che $(g(x,u_n))$ è convergente a $g(x,u)$ in $L^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$. □

Definizione 3.4. L'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & L^p(\Omega;\mathbb{R}^k) & \longrightarrow & L^q(\Omega;\mathbb{R}^m) \\ & u & \longmapsto & g(x,u) \end{array}$$

si chiama *operatore di Nemytskij* o *operatore di superposizione* associato a g.

Teorema 3.5. *Sia $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ una funzione C^1-Carathéodory, siano $1 \le q < p < \infty$ e sia $1 < r < \infty$ tale che*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} .$$

Si supponga che $g(x,0) \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e che esistano $a \in L^r(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|D_s g(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}-1} \tag{3.2}$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}^k$.

Allora $D_s g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{mk}$ è una funzione di Carathéodory, g soddisfa la (3.1) e l'operatore di Nemytskij $\mathcal{G}$ associato a g è di classe C^1. Inoltre risulta

$$\forall u, v \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^k): \quad \mathcal{G}'(u)v = D_s g(x,u)\, v\,,$$

dove si intende che $D_s g(x,s)$ è identificata con una matrice $m \times k$ che agisce su $y \in \mathbb{R}^k$ attraverso

$$D_s g(x,s)\, y = \sum_{j=1}^k y_j\, D_{s_j} g(x,s)\,.$$

Dimostrazione. È evidente che $\{s \longmapsto D_s g(x,s)\}$ è continua per q.o. $x \in \Omega$. Inoltre, se $(e_1,\ldots,e_k)$ è la base canonica in $\mathbb{R}^k$, per ogni $j = 1,\ldots,k$ e $s \in \mathbb{R}^k$ si ha

$$D_{s_j} g(x,s) = \lim_n n\left(g\left(x, s + \frac{1}{n}\, e_j\right) - g(x,s)\right) \qquad \text{q.o. in } \Omega.$$

Pertanto la funzione $\{x \longmapsto D_s g(x,s)\}$ è misurabile per ogni $s \in \mathbb{R}^k$.

Tenuto conto della (3.2), per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s, y \in \mathbb{R}^k$ risulta

$$\begin{aligned} |g(x,s+y) - g(x,s)| &\leq \int_0^1 |D_s g(x,s+ty)\, y|\, dt \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(a(x) + b|s+ty|^{\frac{p}{q}-1}\right) dt\right) |y| \\ &\leq \left(a(x) + b(|s|+|y|)^{\frac{p}{q}-1}\right) |y|\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Poiché $\frac{p}{p-q} = \frac{r}{q}$, dalla (3.3) e dalla disuguaglianza di Young si deduce che

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &\leq |g(x,0)| + a|s| + b|s|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq |g(x,0)| + \frac{p-q}{p}\, a^{\frac{p}{p-q}} + \frac{q}{p}\, |s|^{\frac{p}{q}} + b|s|^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(|g(x,0)| + \frac{p-q}{p}\, a^{\frac{r}{q}}\right) + \left(\frac{q}{p} + b\right) |s|^{\frac{p}{q}}\,. \end{aligned}$$

Poiché $a^{\frac{r}{q}} \in L^q(\Omega)$, si ha che g soddisfa la (3.1) e dal Teorema 3.3 segue che l'operatore Nemytskij

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & L^p(\Omega;\mathbb{R}^k) & \longrightarrow & L^q(\Omega;\mathbb{R}^m) \\ & u & \longmapsto & g(x,u) \end{array}$$

è ben definito e continuo. Dal momento che $\frac{p}{q} - 1 = \frac{p}{r}$, anche l'operatore di Nemytskij

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}: & L^p(\Omega;\mathbb{R}^k) & \longrightarrow & L^r(\Omega;\mathbb{R}^{mk}) \\ & u & \longmapsto & D_s g(x,u) \end{array}$$

è ben definito e continuo.

Sia ora $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue subito che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega;\mathbb{R}^k) & \longrightarrow & L^q(\Omega;\mathbb{R}^m) \\ v & \longmapsto & D_s g(x,u)\, v \end{array}$$

è ben definita, lineare e continua.

Sia (v_n) una successione in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^k) \setminus \{0\}$ convergente a 0. A meno di una sottosuccessione, (v_n) è convergente a 0 anche q.o. ed esiste $w \in L^p(\Omega)$ tale che $|v_n| \leq w$ q.o. Poniamo $z_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_p}$ e definiamo

$$\omega_n(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x,u(x)+v_n(x)) - g(x,u(x)) - D_s g(x,u(x))\, v_n(x)}{|v_n(x)|} & \text{dove } v_n(x) \neq 0, \\ 0 & \text{dove } v_n(x) = 0. \end{cases}$$

Allora (ω_n) è convergente a 0 q.o. e per le (3.2) e (3.3) risulta

$$\begin{aligned} |\omega_n|^r &\leq \left(a + b(|u| + |v_n|)^{\frac{p}{r}} + a + b|u|^{\frac{p}{r}}\right)^r \\ &\leq \left(2a + b(|u| + |w|)^{\frac{p}{r}} + b|u|^{\frac{p}{r}}\right)^r . \end{aligned}$$

Pertanto (ω_n) è convergente a 0 anche in $L^r(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\left(\frac{\|g(x,u+v_n)-g(x,u)-D_s g(x,u)\,v_n\|_q}{\|v_n\|_p}\right)^q$$
$$= \int_\Omega \left|\frac{g(x,u+v_n)-g(x,u)-D_s g(x,u)\,v_n}{\|v_n\|_p}\right|^q dx$$
$$= \int_\Omega |\omega_n|^q |z_n|^q\,dx \le \|\omega_n\|_r^q \|z_n\|_p^q = \|\omega_n\|_r^q\,,$$

per cui
$$\lim_n \frac{\|g(x,u+v_n)-g(x,u)-D_s g(x,u)\,v_n\|_q}{\|v_n\|_p} = 0\,.$$
Pertanto $\mathcal{G}$ è differenziabile secondo Fréchet in u e $\mathcal{G}'(u)v = D_s g(x,u)\,v$.

Infine, per ogni $u_1, u_2, v \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}'(u_1)v - \mathcal{G}'(u_2)v\|_q &= \|D_s g(x,u_1)\,v - D_s g(x,u_2)\,v\|_q \\ &\le \|D_s g(x,u_1) - D_s g(x,u_2)\|_r \|v\|_p\,, \end{aligned}$$

da cui
$$\|\mathcal{G}'(u_1) - \mathcal{G}'(u_2)\| \le \|D_s g(x,u_1) - D_s g(x,u_2)\|_r\,.$$
Dalla continuità dell'operatore $\mathcal{D}$ segue che $\mathcal{G}$ è di classe C^1. □

In vista delle proprietà di compattezza a cui siamo interessati, è utile considerare anche una variante del Teorema 3.3.

Teorema 3.6. *Sia $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ una funzione di Carathéodory e siano $p, q \in [1, \infty[$. Si supponga che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $a_\varepsilon \in L^q(\Omega)$ tale che*

$$|g(x,s)| \le a_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^{\frac{p}{q}} \tag{3.4}$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}^k$.

Allora g soddisfa la condizione (3.1) e, per ogni successione (u_n) limitata in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ e convergente puntualmente q.o. a u, si ha che la successione $(g(x,u_n))$ converge a $g(x,u)$ in norma $L^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione. Scegliendo ad esempio $\varepsilon = 1$, si constata immediatamente che g soddisfa la (3.1).

Sia ora (u_n) una successione limitata in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ e convergente puntualmente q.o. a u. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla (3.4) segue che

$$\begin{aligned}
|g(x,u_n) - g(x,u)|^q &\leq 2^{q-1}\,|g(x,u_n)|^q + 2^{q-1}\,|g(x,u)|^q \\
&\leq 2^{q-1}\,[\; 2^{q-1}\,(a_\varepsilon^q + \varepsilon^q\,|u_n|^p) + 2^{q-1}\,(a_\varepsilon^q + \varepsilon^q\,|u|^p)\;] \\
&\leq 2^{2q-2}\,[2a_\varepsilon^q + \varepsilon^q\,|u_n|^p + \varepsilon^q\,|u|^p]\,,
\end{aligned}$$

da cui segue

$$w_n := 2^{2q-2}\,[2a_\varepsilon^q + \varepsilon^q\,|u_n|^p + \varepsilon^q\,|u|^p] - |g(x,u_n) - g(x,u)|^q \geq 0\,.$$

Applicando il Lemma di Fatou alla successione (w_n) e tenendo conto che $(g(x,u_n))$ converge puntualmente q.o. a $g(x,u)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&2^{2q-1}\int_\Omega a_\varepsilon^q\,dx + 2^{2q-1}\,\varepsilon^q\int_\Omega |u|^p\,dx \\
&\quad\leq \liminf_n \Big[2^{2q-1}\int_\Omega a_\varepsilon^q\,dx + 2^{2q-2}\,\varepsilon^q\int_\Omega |u|^p\,dx \\
&\qquad\qquad +2^{2q-2}\,\varepsilon^q\int_\Omega |u_n|^p\,dx - \int_\Omega |g(x,u_n) - g(x,u)|^q\,dx\Big] \\
&\quad\leq 2^{2q-1}\int_\Omega a_\varepsilon^q\,dx + 2^{2q-2}\,\varepsilon^q\int_\Omega |u|^p\,dx \\
&\qquad\qquad + 2^{2q-2}\,\varepsilon^q\left(\sup_n\int_\Omega |u_n|^p\,dx\right) - \limsup_n\int_\Omega |g(x,u_n) - g(x,u)|^q\,dx\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\limsup_n\int_\Omega |g(x,u_n) - g(x,u)|^q\,dx \leq 2^{2q-2}\,\varepsilon^q\left(\sup_n\int_\Omega |u_n|^p\,dx\right)\,.$$

Tenuto conto della limitatezza di (u_n) in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$, per l'arbitrarietà di ε si conclude che $\lim_n \|g(x,u_n) - g(x,u)\|_q = 0$. □

Vediamo alcuni esempi di funzioni g che soddisfano le ipotesi del precedente teorema.

Proposizione 3.7. *In ciascuno dei seguenti casi è soddisfatta la condizione* (3.4)*:*

(a) *siano* $1 \leq q < p < \infty$*, sia* $1 < r < \infty$ *tale che*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}\,,$$

sia $\alpha \in L^r(\Omega;\mathbb{R}^{mk})$ *e si consideri*

$$g(x,s) = \alpha(x)s\,;$$

(b) *siano* $1 \leq q < p < \infty$*, sia* $1 \leq t < \frac{p}{q}$*, sia* $1 < r < \infty$ *tale che*

$$\frac{1}{r} + \frac{t}{p} = \frac{1}{q}\,,$$

sia $\alpha \in L^r(\Omega)$ *e si considerino*

$$g(x,s) = \alpha(x)\,|s|^t \qquad \textit{oppure} \qquad g(x,s) = \alpha(x)\,|s|^{t-1}s\,;$$

(c) *sia* Ω *di misura finita, siano* $1 \leq q < p < \infty$*, sia* $1 \leq t < \frac{p}{q}$*, sia* $\beta \in \mathbb{R}$ *e si considerino*

$$g(x,s) = \beta\,|s|^t \qquad \textit{oppure} \qquad g(x,s) = \beta\,|s|^{t-1}s\,;$$

(d) *siano* $p, q \in [1,\infty[$*, sia* $\alpha \in L^p(\Omega)$ *e si considerino*

$$g(x,s) = |s+\alpha(x)|^{\frac{p}{q}} - |s|^{\frac{p}{q}} \qquad \textit{oppure} \qquad g(x,s) = |s+\alpha(x)|^{\frac{p}{q}-1}(s+\alpha(x)) - |s|^{\frac{p}{q}-1}s\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'affermazione (a). Applicando la disuguaglianza di Young si ha, per ogni $\delta > 0$,

$$|\alpha(x)\,s| \leq |\alpha(x)|\,|s| = \left|\frac{1}{\delta}\,\alpha(x)\right|\,|\delta s| \leq \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)'}\left|\frac{\alpha(x)}{\delta}\right|^{\left(\frac{p}{q}\right)'} + \frac{\delta^{\frac{p}{q}}}{\frac{p}{q}}\,|s|^{\frac{p}{q}}\,.$$

Scegliendo $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che $\dfrac{\delta^{\frac{p}{q}}}{\frac{p}{q}} = \varepsilon$ e definendo $a_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)'}\left|\dfrac{\alpha(x)}{\delta}\right|^{\left(\frac{p}{q}\right)'}$ si ottiene la conclusione, tenuto conto che $(p/q)' = r/q$.

L'affermazione (b) si dimostra in modo simile, mentre la (c) è un caso particolare della (b).

Per trattare infine il primo caso dell'affermazione (d), osserviamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $M_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}: \quad \left| |\sigma + 1|^{\frac{p}{q}} - |\sigma|^{\frac{p}{q}} \right| \leq M_\varepsilon + \varepsilon |\sigma|^{\frac{p}{q}} .$$

Ne segue

$$\forall s, t \in \mathbb{R}: \quad \left| |s + t|^{\frac{p}{q}} - |s|^{\frac{p}{q}} \right| \leq M_\varepsilon |t|^{\frac{p}{q}} + \varepsilon |s|^{\frac{p}{q}} .$$

In particolare, risulta

$$\left| |s + \alpha(x)|^{\frac{p}{q}} - |s|^{\frac{p}{q}} \right| \leq M_\varepsilon |\alpha(x)|^{\frac{p}{q}} + \varepsilon |s|^{\frac{p}{q}} ,$$

da cui la tesi.

Il secondo caso può essere trattato in modo simile. □

Osservazione 3.8. Più in generale, si possono considerare $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ di Carathéodory e $p_1, \ldots, p_k, q \in [1, \infty[$.

Se, ad esempio, esistono $a \in L^q(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|g(x, s_1, \ldots, s_k)| \leq a(x) + b \left(|s_1|^{\frac{p_1}{q}} + \cdots + |s_k|^{\frac{p_k}{q}} \right)$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}^k$ allora, per ogni $u_1 \in L^{p_1}(\Omega), \ldots, u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, si ha $g(x, u_1, \ldots, u_k) \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & L^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L^{p_k}(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega; \mathbb{R}^m) \\ & (u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto & g(x, u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

è continua e limitata sui limitati.

Se invece $g(x, 0) \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ed esistono $a_j \in L^{r_j}(\Omega)$, $1 \leq j \leq k$, e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$1 \leq q < p_j \,, \qquad 1 < r_j < \infty \,, \qquad \frac{1}{r_j} + \frac{1}{p_j} = \frac{1}{q} \,,$$
$$|D_{s_j} g(x, s)| \leq a_j(x) + b \left(|s_1|^{\frac{(p_1/q)}{(p_j/q)'}} + \cdots + |s_k|^{\frac{(p_k/q)}{(p_j/q)'}} \right)$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}^k$, si ha che $\mathcal{G}$ è di classe C^1.

Le dimostrazioni sono un semplice adattamento di quelle dei Teoremi 3.3 e 3.5. Una simile estensione può essere considerata anche per il Teorema 3.6.

4 Funzionali del Calcolo delle variazioni

I risultati precedentemente richiamati trovano applicazione nell'ambito dei funzionali del Calcolo delle Variazioni. Per una trattazione elementare degli spazi di Sobolev, rimandiamo ad esempio a [3].

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^N$, $\quad 1 < p < \infty$ e $\varphi : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ una funzione C^1-Carathéodory.

Teorema 4.1. *Supponiamo che* $\varphi(x, 0, 0) \in L^1(\Omega)$ *e che esistano* $a \in L^{p'}(\Omega)$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$|D_s\varphi(x, s, \xi)| \leq a(x) + b|s|^{p-1} + b|\xi|^{p-1}\,,$$
$$|D_\xi\varphi(x, s, \xi)| \leq a(x) + b|s|^{p-1} + b|\xi|^{p-1}\,,$$

per q.o. $x \in \Omega$ *ed ogni* $s \in \mathbb{R}$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *si ha* $\varphi(x, u, Du) \in L^1(\Omega)$ *e il funzionale*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \varphi(x, u, Du)\, dx \end{array}$$

è di classe C^1. *Inoltre, per ogni* $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ *si ha*

$$\langle \mathcal{F}'(u), v\rangle = \int_\Omega \Big[D_\xi\varphi(x, u, Du) \cdot Dv + D_s\varphi(x, u, Du)v\Big]\, dx\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che $\mathcal{F}$ si può ottenere come composizione dell'applicazione lineare e continua

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}) \\ u & \longmapsto & (u, D_1u, \ldots, D_Nu) \end{array}$$

con l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega;\mathbb{R}^{N+1}) & \longrightarrow & L^1(\Omega) \\ (w_0, w_1, \dots, w_N) & \longmapsto & \varphi(x, w_0, w_1, \dots, w_N) \end{array}$$

che è di classe C^1 per il Teorema 3.5 e infine con l'applicazione lineare e continua

$$\begin{array}{ccc} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega z\, dx \end{array}$$

La formula per $\mathcal{F}'(u)$ segue dal teorema di derivazione di una funzione composta. $\square$

Si osservi che

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \Big[D_\xi \varphi(x, u, Du) \cdot Dv + D_s \varphi(x, u, Du) v \Big]\, dx = 0 \qquad \forall v \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

non è altro, per definizione, che la formulazione debole del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big[D_\xi \varphi(x, u, Du)\big] + D_s \varphi(x, u, Du) = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ D_\xi \varphi(x, u, Du) \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$.

In vista del secondo esempio, ricordiamo il

Teorema 4.2 (di Sobolev). *Sia $p < N$ e sia $p^* := \frac{Np}{N-p}$. Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_q \le C(N, p)\, \|Du\|_p\,.$$

Teorema 4.3. *Sia $p < N$ e supponiamo che $\varphi(x, 0, 0) \in L^1(\Omega)$ e che esistano $a_0 \in L^{(p^*)'}(\Omega)$, $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|D_s \varphi(x, s, \xi)| \le a_0(x) + b|s|^{p^*-1} + b|\xi|^{\frac{p}{(p^*)'}}\,,$$

$$|D_\xi \varphi(x, s, \xi)| \le a_1(x) + b|s|^{\frac{p^*}{p'}} + b|\xi|^{p-1}\,,$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha $\varphi(x,u,Du) \in L^1(\Omega)$ e il funzionale

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \varphi(x,u,Du)\,dx \end{array}$$

è di classe C^1. Inoltre, per ogni $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\langle \mathcal{F}'(u), v\rangle = \int_\Omega \Big[D_\xi \varphi(x,u,Du)\cdot Dv + D_s\varphi(x,u,Du)v \Big]\,dx\,.$$

Dimostrazione. In questo caso si tratta si comporre le tre applicazioni

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^{p^*}(\Omega) \times L^p(\Omega;\mathbb{R}^N) \\ u & \longmapsto & (u, Du) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L^{p^*}(\Omega) \times L^p(\Omega;\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & L^1(\Omega) \\ (v,w) & \longmapsto & \varphi(x,v,w) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega z\,dx \end{array}$$

tenendo anche conto dell'Osservazione 3.8. □

In questo caso si ha che

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \Big[D_\xi \varphi(x,u,Du)\cdot Dv + D_s\varphi(x,u,Du)v \Big]\,dx = 0 & \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

è, per definizione, la formulazione debole del problema differenziale

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big[D_\xi \varphi(x,u,Du)\big] + D_s\varphi(x,u,Du) = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Osservazione 4.4. Una variante del Teorema di Sobolev, con una stima del tipo

$$\|u\|_{p^*} \leq C(N,p)\left(\|u\|_p^p + \|Du\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

vale anche su tutto $W^{1,p}(\Omega)$, a patto che $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare. In tal caso anche le stime di crescita richieste nel Teorema 4.1 possono essere sostituite da quelle del Teorema 4.3.

A questo punto ritorniamo all'equazione di Schrödinger con termine di correzione non lineare inizialmente introdotta

$$-\Delta u + Vu = \gamma|u|^{p-1}u\,, \tag{4.1}$$

con $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua, $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$, $\inf\limits_{\mathbb{R}^N} V > 0$, $\gamma > 0$, $p > 1$ ed anche $p < \frac{N+2}{N-2}$ per $N \geq 3$.

Poniamo

$$X := \left\{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V\,u^2\,dx < +\infty\right\} \tag{4.2}$$

ed introduciamo un prodotto scalare in X ponendo

$$(u|v) := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + Vuv)\,dx\,. \tag{4.3}$$

Denotiamo anche con $\|\ \|$ la norma indotta. Poiché $\inf\limits_{\mathbb{R}^N} V > 0$, si verifica facilmente che X è uno spazio di Hilbert immerso con continuità in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Per la ricerca di soluzioni positive di (4.1), è conveniente considerare il funzionale $\mathcal{F}$ definito nella seguente maniera

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ u &\longmapsto \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx - \frac{\gamma}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1}\,dx\,.\end{aligned}$$

Teorema 4.5. *Il funzionale $\mathcal{F}$ è di classe C^1 e, per ogni $u, v \in X$, si ha*

$$\langle \mathcal{F}'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + Vuv)\,dx - \gamma\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p v\,dx\,. \tag{4.4}$$

Inoltre, se $u \in X \setminus \{0\}$ è un punto critico di $\mathcal{F}$, si ha che $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $u(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ ed u è una soluzione debole di (4.1).

Dimostrazione. Evidentemente il funzionale

$$\left\{ u \mapsto (u|u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx \right\}$$

è di classe C^1. D'altra parte dal Teorema 3.5 segue che l'applicazione

$$\left\{ u \mapsto (u^+)^{p+1} \right\}$$

è di classe C^1 da $L^{p+1}(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$. Per il Teorema di Sobolev e la disuguaglianza di Hölder, $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ si immerge con continuità in $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. A maggior ragione anche X si immerge con continuità in $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Ne segue che $\mathcal{F}$ è di classe C^1 su X e che vale la (4.4).

Se $\in X$ è un punto critico per $\mathcal{F}$, si ha quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + Vuv)\, dx - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p v\, dx = 0 \qquad \forall v \in X\,. \tag{4.5}$$

Dalla teoria della regolarità per equazioni ellittiche (vedi ad esempio [5]), segue che $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ed u è soluzione debole della (4.1). Scegliendo $v = u^-$ nella (4.5), si deduce che $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Dalla disuguaglianza di Harnack (vedi ad esempio [10]) segue infine che $u(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. □

In vista della condizione di Palais-Smale, ricordiamo il

Teorema 4.6 (di Rellich). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e con frontiera regolare e sia $1 \leq p < N$. Allora ogni successione (u_n) limitata in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ammette una sottosuccessione (u_{n_k}) convergente in $L^q(\mathbb{R}^N)$ per ogni q tale che $1 \leq q < p^*$.*

Teorema 4.7 (di compattezza). *Se (u_n) è una successione limitata in X, allora esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) convergente in $L^q(\mathbb{R}^N)$ per ogni $q \in [2, 2^*[$.*

Dimostrazione. Si consideri una famiglia di palle $\{B_{R_j}(0)\}_{R_j>0}$ che invade lo spazio $\mathbb{R}^N$ per j che tende a ∞. Applicando il Teorema di Rellich a ciascuna palla $B_{R_j}(0)$, si sa che esiste una sottosuccessione $(u_{\sigma_j(k)})$ convergente a $u^{(j)}$ in $L^q(B_{R_j}(0))$, per ogni $q \in [1, 2^*[$.

In particolare questo accade per ogni $q \in [2, 2^*[$ ed inoltre si sa anche che, a meno di un passaggio a sottosuccessione, $(u_{\sigma_j(k)})$ converge ad $u^{(j)}$ quasi ovunque in $B_{R_j}(0)$. Con un procedimento di diagonalizzazione si ottiene una sottosuccessione (u_{n_k}) che converge quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$. Questo consente di definire in modo consistente un'unica $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che (u_{n_k}) è convergente a u in $L^q(B_{R_j}(0))$ per ogni j.

Si consideri ora il caso particolare $q = 2$.

Per il termine $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_k} - u|^2\, dx$ si ha la seguente stima.

Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi e sia $K > \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, |u_n|^2\, dx$.

Si scelga $R > 0$ sufficientemente grande da avere $\displaystyle\inf_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V > \frac{4K}{\varepsilon}$. Allora $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq \nu$ si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_k} - u|^2\, dx &= \int_{B_R(0)} |u_{n_k} - u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u_{n_k} - u|^2\, dx \\
&= \int_{B_R(0)} |u_{n_k} - u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \frac{V(x)}{V(x)}\, |u_{n_k} - u|^2\, dx \\
&\leq \int_{B_R(0)} |u_{n_k} - u|^2\, dx + \frac{1}{\displaystyle\inf_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(x)\, |u_{n_k} - u|^2\, dx \\
&\leq \int_{B_R(0)} |u_{n_k} - u|^2\, dx + \frac{2}{\displaystyle\inf_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, |u_{n_k}|^2\, dx \right. \\
&+ \left. \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, |u|^2\, dx \right) < 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Si osservi che, sul primo termine del secondo membro si è applicato il Teorema di Rellich nella palla $B_R(0)$, mentre l'espressione in parentesi è limitata, per ipotesi nel primo addendo e per il Lemma di Fatou nel secondo addendo. Pertanto il primo membro della stima tende a zero per $k \to +\infty$.

Si è dunque dimostrata la convergenza di (u_{n_k}) a u in $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Per la disuguaglianza di Hölder, si ha che per ogni $q \in]2, 2^*[$ esiste $\alpha \in]0, 1[$ tale che

$$
\|u_{n_k} - u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_{n_k} - u\|^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u_{n_k} - u\|^{1-\alpha}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\,.
$$

Tenuto conto del Teorema di Sobolev, ne segue la convergenza di (u_{n_k}) ad u in ogni $L^q(\mathbb{R}^N)$ con $q < 2^*$. $\square$

Possiamo ora provare il nostro risultato principale (vedi [9]).

Teorema 4.8. *L'equazione* (4.1) *ammette una soluzione debole* $u \in X \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ *con* $u(x) > 0$ *in* $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Applichiamo a $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$ il Corollario 2.10. Tenuto conto dell'immersione continua di X in $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, si ha

$$\mathcal{F}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^{p+1},$$

dove C è un'opportuna costante. Essendo $p > 1$, esistono $r, \varepsilon > 0$ tali che

$$\mathcal{F}(u) \geq \varepsilon \qquad \text{per ogni } u \in X \text{ con } \|u\| = r\,.$$

D'altra parte $\mathcal{F}(0) = 0$ e, fissata $v \in X \setminus \{0\}$ con $v \geq 0$, esiste $t > 0$ tale che $\|tv\| > r$ e $\mathcal{F}(tv) \leq 0$. Posto $u_0 = 0$ e $u_1 = tv$, è chiaro che qualunque curva γ che congiunga u_0 con u_1 deve intersecare l'insieme $\{u \in X : \|u\| = r\}$, da cui

$$\inf\left\{\max_{t\in[0,1]}\mathcal{F}(\varphi(t)) : \quad \varphi \in C([0,1];X), \qquad \varphi(0) = u_0,\, \varphi(1) = u_1\right\} \geq \varepsilon > 0\,.$$

Consideriamo infine una successione (u_n) di $(PS)_c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Esiste quindi una successione infinitesima (φ_n) in X' tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \cdot \nabla v + V u_n v)\, dx - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p v\, dx = \langle \varphi_n, v\rangle \qquad \forall v \in X\,.$$

Scegliendo $v = u_n$, si ottiene

$$\begin{aligned}
-\|\varphi_n\|_{X'}\|u_n\| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V u_n^2\right) dx - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p+1}\, dx \\
&= (p+1)\mathcal{F}(u_n) - \left(\frac{p+1}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V u_n^2\right) dx \\
&= (p+1)\mathcal{F}(u_n) - \left(\frac{p+1}{2} - 1\right) \|u_n\|^2\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\|\varphi_n\|_{X'} \to 0$ e $\mathcal{F}(u_n) \to c$, si deduce che (u_n) è limitata in X. Per il Teorema di compattezza, a meno di una sottosuccessione (u_n) è convergente ad una qualche u in ogni $L^q(\mathbb{R}^N)$ con $2 \leq q < 2^*$. Poiché $p < 2^* - 1$, dal Teorema 3.3 segue che $(u_n^+)^p$ è convergente a $(u^+)^p$ in $L^{2^{*\prime}}(\mathbb{R}^N)$. Poiché X si immerge con continuità in $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, si ha che $L^{2^{*\prime}}(\mathbb{R}^N)$ si immerge con continuità in X'. Risulta quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \cdot \nabla v + V u_n v)\, dx = \langle \gamma (u_n^+)^p + \varphi_n, v \rangle \qquad \forall v \in X$$

con $\gamma(u_n^+)^p + \varphi_n$ convergente in X'. Ne segue che (u_n) è convergente in X, per cui vale la condizione $(PS)_c$.

Dal Corollario 2.10 si deduce che esiste un punto critico $u \in X$ di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{F}(u) \geq \varepsilon$. In particolare, u non è l'elemento nullo di X. La tesi segue allora dal Teorema 4.5. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 349–381.

[2] V. Benci and T. D'Aprile, The semiclassical limit of the nonlinear Schröinger equation in a radial potential, *J. Differential Equations* **184** (2002), *no.* 1, 109–138.

[3] H. Brezis, "Analisi funzionale - Teoria e applicazioni", Liguori, Napoli, 1986.

[4] A. Floer and A. Weinstein, Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential, *J. Funct. Anal.* **69** (1986), *no.* 3, 397–408.

[5] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, "Elliptic partial differential equations of second order", *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[6] J. L. Kelley, "General topology", Springer-Verlag, New York, 1975.

[7] M.A. Krasnoselskii, "Topological methods in the theory of nonlinear integral equations", Gosudarstv. Izdat. Tehn. – Teor. Lit., Moscow, 1956. The Macmillan Co., New York, 1964.

[8] P.H. Rabinowitz, "Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations", *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, **65**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[9] P.H. Rabinowitz, On a class of nonlinear Schrödinger equations, *Z. Angew. Math. Phys.* **43** (1992), *no.* 2, 270–291.

[10] M. Renardy and R. C. Rogers, "An introduction to partial differential equations", *Texts in Applied Mathematics*, **13**, Springer-Verlag, New York, 1993.

[11] W. Rudin, "Analisi reale e complessa", Boringhieri, Torino, 1974.

[12] A. Weinstein, Nonlinear stabilization of quasimodes, in “Geometry of the Laplace Operator” (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), 301–318, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **36**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.