INTRODUZIONE ALLA Γ-CONVERGENZA

Micol AMAR
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma
via A. Scarpa 16, 00161 Roma, Italy
email:micol.amar@sbai.uniroma1.it

DOTTORATO di MODELLI e METODI MATEMATICI
per la TECNOLOGIA e la SOCIETÀ
DOTTORATO di INGEGNERIA delle STRUTTURE
DOTTORATO di MECCANICA TEORICA e APPLICATA

A.A. 2008/2009
A.A. 2009/2010

INDICE

NOTAZIONI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$	insieme dei numeri interi relativi
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\overline{\mathbb{R}}$	retta reale estesa: $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\mathcal{M}^{M \times N}$	insieme delle matrici $M \times N$
$\lvert E \rvert$	misura di Lebesgue dell'insieme misurabile E
$\lVert \cdot \rVert_X$	norma di un vettore nello spazio normato X
Ω	sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	bordo di Ω
$\mathcal{A}(\Omega)$	famiglia dei sottoinsiemi aperti contenuti in Ω
$A \subset\subset B$	la chiusura di A è contenuta in B
$\mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^M)$	spazio delle funzioni k-volte derivabili con continuità in Ω, a valori in $\mathbb{R}^M$
$\mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$	$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^M)$
$\mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$	spazio delle funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^M$ con supporto compatto contenuto in Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega; \mathbb{R}^M)$	spazio delle funzioni k-volte derivabili in Ω, a valori in $\mathbb{R}^M$, con derivate fino all'ordine k continue e con supporto compatto
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M) = \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^M)$	$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_0^k(\Omega; \mathbb{R}^M)$
$L^p(\Omega; R^M),\ 1 \leq p \leq +\infty,$	spazio delle funzioni p-sommabili a valori in $\mathbb{R}^M$
$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^M),\ 1 \leq p \leq +\infty,$	spazio di Sobolev delle funzioni a valori in $\mathbb{R}^M$, k-volte derivabili in senso debole, con derivate p-sommabili
$W^{k,p}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^M),\ 1 \leq p \leq +\infty,$	funzioni di $W^{k,p}(\Omega'; \mathbb{R}^M)$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$,
$W^{k,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^M),\ 1 \leq p < +\infty,$	chiusura di $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$ in $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$
$W^{k,p}_\#((0,1)^N; \mathbb{R}^M),\ 1 \leq p < +\infty,$	funzioni di $W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ 1-periodiche
$H^1(\Omega; \mathbb{R}^M) = W^{1,2}(\Omega; ; \mathbb{R}^M)$	
$H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M) = W^{1,2}_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$	

CAPITOLO 1
Introduzione e richiami di analisi funzionale.

1.1 Introduzione

In queste note siamo interessati a studiare il comportamento asintotico per $\varepsilon \to 0$ di funzionali integrali della forma

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du(x)\right)\, dx \qquad \text{oppure} \qquad F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{u(x)}{\varepsilon}, Du(x)\right)\, dx\,,$$

definiti su un opportuno spazio funzionale e nell'ipotesi in cui la funzione integranda f sia periodica rispetto alla prima variabile e soddisfi opportune condizioni che verranno discusse nel seguito.

Integrali di questo tipo modellizzano (l'energia di) vari fenomeni fisici, quali ad esempio le deformazioni elastiche di un corpo non omogeneo, il potenziale elettrico di un tessuto biologico, il comportamento di un raggio luminoso all'interno di un mezzo a densità non omogenea, etc...

Poiché ε rappresenta la scala microscopica (quindi molto piccola) del mezzo, mentre l'esperienza fisica mostra che, in generale, il comportamento macroscopico è quello di un mezzo omogeneo, ci si chiede se la descrizione matematica proposta è fisicamente consistente e quindi se, per $\varepsilon \to 0$, (l'energia) F_ε tende ad un funzionale limite F_{om}, anch'esso di forma integrale con un integrando indipendente da x o da u, rispettivamente, che descriva il comportamento macroscopico omogeneo del mezzo. Inoltre, poiché gli stati di equilibrio del mezzo a livello microscopico sono determinati dalle (eventuali) soluzioni del problema di minimo

$$\min\{F_\varepsilon(u) + \int_\Omega gu\, dx \;:\; u = \phi \text{ su } \partial\Omega\}\,, \tag{1.1}$$

e quelli del mezzo a livello macroscopico sono determinati dalle (eventuali) soluzioni del problema di minimo

$$\min\{F_{om}(u) + \int_\Omega gu\, dx \;:\; u = \phi \text{ su } \partial\Omega\}\,, \tag{1.2}$$

dove g rappresenta una sollecitazione esterna assegnata, ϕ fornisce le condizioni al contorno e $\partial\Omega$ denota il bordo di Ω (supposto regolare), diviene essenziale anche capire se i valori minimi e gli stati microscopici di minimo equilibrio convergono in qualche senso a quelli macroscopici, in modo tale che il passaggio dalla descrizione microscopica a quella macroscopica sia fisicamente consistente.

Negli anni '70, proprio per affrontare problemi di questo tipo, è stata introdotta da E. De Giorgi una nozione di convergenza variazionale, la cosiddetta Γ-*convergenza*, per rispondere in modo completo alle questioni che ci siamo poste. La Γ-convergenza è in realtà un metodo estremamente generale, che si adatta allo studio di svariati problemi, anche molto diversi da quelli che andremo a considerare.

Per poter effettuare almeno un primo approccio al problema che ci siamo proposti, senza la pretesa di essere esaustivi, dovremo quindi affrontare le seguenti questioni:

1) studio del problema di minimo (rilassamento);

2) studio della convergenza dei funzionali (Γ-limite);

3) rappresentazione integrale del funzionale limite.

Preliminari alle precedenti questioni sono alcune nozioni di analisi funzionale, riguardanti gli spazi metrici e normati e gli spazi di Sobolev, che richiameremo brevemente per coloro che non sono familiari con esse.

1.2 Spazi metrici e normati; spazi di Hilbert

DEFINIZIONE 1.1. Sia X un insieme non vuoto. Definiamo su $X \times X$ una *distanza*, cioè un funzionale $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$;

(ii) (*Proprietà di annullamento*) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(iii) (*Proprietà di simmetria*) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;

(iv) (*Disuguaglianza triangolare*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

La coppia (X, d) si chiama *spazio metrico*.

DEFINIZIONE 1.2. Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di punti di X. Sia $x_0 \in X$; diremo che tale successione *converge* a x_0 per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n \to x_0$) se $d(x_n, x_0) \to 0$ per $n \to +\infty$.

DEFINIZIONE 1.3. Sia X uno spazio vettoriale. Definiamo su X una *norma*, cioè un funzionale $\| \cdot \|_X : X \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $\|x\|_X \geq 0$ per ogni $x \in X$;

(ii) (*Proprietà di annullamento*) $\|x\|_X = 0 \iff x = 0$;

(iii) (*Positiva omogeneità*) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \; \|x\|_X$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iv) (*Disuguaglianza triangolare*) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ per ogni $x, y \in X$.

La coppia $(X, \| \cdot \|_X)$ (o più semplicemente X, qualora $\| \cdot \|_X$ sia assegnata) si chiama *spazio normato*.

Uno spazio normato è metrico rispetto alla distanza indotta dalla norma, cioè $d(x, y) = \|x - y\|_X$.

DEFINIZIONE 1.4. Sia X uno spazio normato e $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di punti di X. Sia $x_0 \in X$; diremo che $\{x_n\}$ converge ad x_0 per $n \to +\infty$ (e scriveremo $x_n \to x_0$), se $\|x_n - x_0\|_X \to 0$, per $n \to +\infty$. Questa convergenza sarà anche detta *convergenza forte*.

Diremo che $\{x_n\}$ è una *successione di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0 \; .$$

Osserviamo che ogni successione convergente è di Cauchy, mentre, in generale, non vale il viceversa.

DEFINIZIONE 1.5. Diremo che X è uno *spazio normato completo* se ogni successione di Cauchy è convergente in X. In tal caso X è detto *spazio di Banach*.

Sia X uno spazio di Banach (di dimensione finita o infinita). Indicheremo con X^* lo spazio duale di X, cioè lo spazio di Banach di tutti i funzionali lineari e continui su X.

Indicheremo con X^{**} lo spazio biduale di X (cioè lo spazio duale di X^*). È ben noto che X può essere identificato con un sottospazio di X^{**}. Diremo che X è riflessivo se X coincide con il suo spazio biduale X^{**}.

Introduciamo, infine, la nozione di spazio di Hilbert. A tal fine dobbiamo preliminarmente introdurre la definizione di prodotto scalare.

DEFINIZIONE 1.6. Sia X uno spazio vettoriale. Definiamo *prodotto scalare* su $X \times X$ un funzionale $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

(i) (*Proprietà di annullamento*) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$ e $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;

(ii) (*Proprietà di simmetria*) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ per ogni $x, y \in X$;

(iii) (*Proprietà di linearità*) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ per ogni $x, y, z \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che le proprietà (ii) e (iii) implicano, in realtà, che il prodotto scalare è un funzionale bilineare, cioè lineare in entrambe le variabili.

Un prodotto scalare induce in modo naturale su X una norma, definita da $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; pertanto, uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se, inoltre, esso risulta essere completo rispetto a tale norma, allora viene chiamato *spazio di Hilbert*. Quindi, uno spazio di Hilbert è, in particolare, uno spazio di Banach. In generale, non vale il viceversa, a meno che la norma non possieda la cosiddetta *proprietà del parallelogramma*, cioè soddisfi la condizione

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,.$$

In tal case è possibile definire un prodotto scalare a partire da una siffatta norma e quindi ottenere uno spazio di Hilbert.

1.3 Spazi di funzioni sommabili secondo Lebesgue

Ricordiamo che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme aperto, $1 \leq p < +\infty$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ è una funzione misurabile, si dice che f è p-sommabile secondo Lebesgue (e si scrive $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$) se

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < +\infty \ .$$

Analogamente, si dice che f è essenzialmente limitata (e si scrive $f \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$) se

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \ : \ |f(x)| \leq \alpha \text{ q.o. in } \Omega\} < +\infty \ .$$

In particolare, diremo che $f \in L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^M)$, $1 \leq p \leq +\infty$, se $f \in L^p(A; \mathbb{R}^M)$, per ogni insieme aperto $A \subset\subset \Omega$.

Gli spazi L^p dotati delle norme sopra definite sono spazi di Banach. Ovviamente, una successione $\{f_n\} \subseteq L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ converge ad $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ se $\|f_n - f\|_p \to 0$, per $n \to +\infty$. Questa convergenza verrà detta *convergenza forte*.

Dato $1 \leq p \leq +\infty$, indichiamo con p' l'esponente coniugato di p, cioè $1/p + 1/p' = 1$ se $1 < p < +\infty$, $p' = +\infty$ se $p = 1$ e $p' = 1$ se $p = +\infty$. Se $1 \leq p < +\infty$, si ha che $L^{p'}$ è lo spazio duale di L^p, mentre L^1 è strettamente contenuto nel duale di L^∞. Inoltre, se $1 < p < +\infty$, lo spazio L^p è riflessivo.

Oltre alla convergenza forte, possiamo introdurre in tali spazi una nozione di convergenza più debole. A tale scopo, assumiamo per semplicità $M = 1$ (e quindi scriveremo $L^p(\Omega)$ anziché $L^p(\Omega;\mathbb{R})$), in quanto il caso generale si ottiene, poi, ragionando per componenti.

DEFINIZIONE 1.7. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(\Omega)$. Sia dapprima $1 \leq p < +\infty$. Diremo che la successione $\{f_n\}$ converge debolmente ad $f \in L^p(\Omega)$ (e scriveremo $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$) se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)\ dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\ dx \qquad \forall g \in L^{p'}(\Omega)\ .$$

Analogamente, se $p = +\infty$, diremo che la successione $\{f_n\}$ converge $*$-debolmente ad $f \in L^\infty(\Omega)$ (e scriveremo $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$) se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)\ dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\ dx \qquad \forall g \in L^1(\Omega)\ .$$

Osserviamo che la convergenza debole non è una convergenza che proviene da una metrica (ciò accade solo negli spazi normati finito-dimensionali e non è questo il caso), quindi non possiede le buone proprietà che caratterizzano gli spazi metrici; tuttavia essa diviene metrizzabile sugli insiemi limitati.

TEOREMA 1.8.

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^p(\Omega)$ fortemente convergente ad $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora

(i) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ se $1 \leq p < +\infty$ ed $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$;

(ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, per $1 \leq p \leq +\infty$.

Nel caso in cui si abbia $1 < p < +\infty$, è possibile invertire il risultato del precedente teorema.

TEOREMA 1.9.

Assumiamo $1 < p < +\infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^p(\Omega)$. Suppponiamo che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ e $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Allora $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$.

TEOREMA 1.10.

Assumiamo che $\{f_n\}$ sia una successione debolmente convergente in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, (rispettivamente, $*$-debolmente convergente in $L^\infty(\Omega)$). Allora essa è equilimitata.

Assumiamo che $\{f_n\}$ sia una successione equilimitata in $L^p(\Omega)$, $1 < p \leq +\infty$. Allora esiste una funzione $f \in L^p(\Omega)$ ed una sottosuccessione di $\{f_n\}$ debolmente convergente ad f per $1 < p < +\infty$ (rispettivamente $*$-debolmente convergente ad f per $p = +\infty$).

Infine, se $\{f_n\} \subseteq L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) e $f_n \rightharpoonup f \in L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < +\infty$ (rispettivamente $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \in L^\infty(\Omega)$), allora

$$\|f\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p\,. \tag{1.3}$$

La disuguaglianza (1.3) va sotto il nome di proprietà di semicontinuità della norma L^p rispetto alla convergenza debole (vedi Def. 1.23).

TEOREMA 1.11.

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^p(\Omega)$ fortemente convergente ad $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ ed un insieme $N \subset \Omega$ di misura nulla, tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \Omega \setminus N$, ovvero la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge ad f puntualmente quasi ovunque in Ω.

TEOREMA 1.12.

(i) Lemma di Fatou. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su Ω, tali che $f_n(x) \ge 0$, per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\int_\Omega [\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)]\; dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\; dx \; .$$

(ii) Teorema di convergenza monotona. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su Ω, tali che $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\int_\Omega f_n(x)\; dx \to \int_\Omega f(x)\; dx \qquad \text{dove} \qquad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \; .$$

(iii) Teorema di convergenza dominata. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su Ω convergente puntualmente quasi ovunque ad una assegnata funzione f. Supponiamo che per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $|f_n(x)| \le g(x)$, dove $g \in L^1(\Omega)$. Allora, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$, per $n \to +\infty$.*

Osserviamo che per $p = 2$ lo spazio di Banach L^p è in realtà uno spazio di Hilbert, rispetto al prodotto scalare $(f, g) := \int_\Omega f(x)g(x)\; dx$. Pertanto, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz negli spazi di Hilbert, si ottiene

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)\; dx \right| \le \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \le \|f\|_2 \|g\|_2 \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega) \; ,$$

che implica, in particolare, che il prodotto di due funzioni L^2 fornisce una funzione dello spazio L^1. Questo risultato si può generalizzare al caso del prodotto di due funzioni appartenenti a due spazi di Lebesgue fra loro in dualità, come segue dal prossimo teorema.

TEOREMA 1.13 (Disuguaglianza di Hölder).

Sia $1 \le p \le +\infty$ e p' l'esponente coniugato di p. Allora per ogni $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, si ha che $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)\; dx \right| \le \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \le \|u\|_p \|v\|_{p'} \; .$$

ESERCIZIO: Come conseguenza della disuguaglianza di Holder, dimostrare che, se $p, q, r \in (1, +\infty)$ e $1/p + 1/q = 1/r$, allora $fg \in L^r(\Omega)$ per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ e che

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \; .$$

ESERCIZIO: Dimostrare che, se Ω è un insieme aperto e limitato ed $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq +\infty$, allora $f \in L^q(\Omega)$, per ogni $1 \leq q < p$, e

$$\|f\|_q \leq |\Omega|^{(p-q)/pq} \|f\|_p \ ,$$

con la convenzione che $(p-q)/pq$ vale $1/q$ se $p = +\infty$.

Stabiliamo ora un utile risultato riguardante la convergenza debole di funzioni periodiche. Assumiamo per semplicità che f sia una funzione $(0,1)^N$-periodica (o più semplicemente 1-periodica), anche se il risultato vale per funzioni periodiche generali, pur di interpretare $\overline{f}$ come il valor medio della funzione f sul periodo.

TEOREMA 1.14.

Sia $Y = (0,1)^N$ e sia $f \in L^p(Y)$, $1 \leq p \leq +\infty$, estesa per periodicità su tutto $\mathbb{R}^N$. Sia $f_\varepsilon(x) = f(x/\varepsilon)$; allora, per $\varepsilon \to 0^+$, si ha

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &\rightharpoonup \overline{f} := \int_Y f(x)\ dx \qquad \text{se } 1 \leq p < +\infty \ ; \\ f_\varepsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} := \int_Y f(x)\ dx \qquad \text{se } p = +\infty \ . \end{aligned}$$

Nel caso in cui $f(x) = \sin x$, si ottiene che $\sin(x/\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(0, 2\pi)$, risultato noto come Lemma di Riemann-Lebesgue. Esso implica, in particolare, che la successione $\{\sin(nx)\}$ rappresenta un esempio di successione debolmente, ma ovviamente non fortemente, convergente.

ESERCIZIO: Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in (0, 1/2] \ ; \\ \beta & \text{se } x \in (1/2, 1) : \end{cases} \qquad \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha \neq \beta \ .$$

Dopo aver esteso f per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, calcolare il limite debole ($*$-debole) di $f_n(x) := f(nx)$ in $L^p(0,1)$ per $1 \leq p < +\infty$ (per $p = +\infty$). Dimostrare che la successione $\{f_n\}$ non converge fortemente.

ESERCIZIO: Assumiamo che $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione limitata tale che

1) $f(\cdot, s)$ è continua e $(0,1)$-periodica, per ogni $s \in \mathbb{R}$;
2) $|f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leq |s_1 - s_2|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Dimostrare che

$$f(nx, u) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f}(u) \qquad *\text{-debolmente in } L^\infty(\mathbb{R})$$

per ogni $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, dove

$$\overline{f}(s) = \int_0^1 f(y, s)\ dy \ .$$

(Hint.: Approssimare u con funzioni semplici)

ESERCIZIO: Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come nel precedente esercizio. Dimostrare che

$$f(nx, u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f}(u) \qquad *\text{-debolmente in } L^\infty(\mathbb{R})$$

per ogni successione $\{u_n\} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ fortemente convergente ad $u \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Richiamiamo ora un'importante e ben nota proprietà di annullamento delle funzioni sommabili.

LEMMA 1.15.

Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Assumiamo che*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\;dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)\ .$$

Allora $f = 0$ *quasi ovunque in* Ω.

COROLLARIO 1.16.

Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Assumiamo che*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\;dx = 0 \tag{1.4}$$

per tutte le funzioni $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ *tali che* $⨍_\Omega \phi\;dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi\;dx = 0$. *Allora esiste una costante* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $f = c$ *quasi ovunque in* Ω.

1.4 Spazi di Sobolev

In questo paragrafo richiameremo le proprietà principali delle funzioni che ammettono derivate in senso debole. Innanzitutto, dato $k \in \mathbb{N}$ e $1 \le p \le +\infty$, denotiamo con $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ lo spazio (detto *spazio di Sobolev*) delle funzioni misurabili che ammettono k-derivate nel senso delle distribuzioni p-sommabili secondo Lebesgue. Tale spazio è di Banach se dotato della norma

$$\begin{aligned} \|f\|_{k,p} &:= \left(\sum_{\alpha=0}^{k}\|\nabla^\alpha f\|_p^p\right)^{1/p} \qquad && \text{se } 1 \le p < +\infty\ ; \\ \|f\|_{k,\infty} &:= \max_{0\le\alpha\le k}\|\nabla^\alpha f\|_\infty && \text{se } p = +\infty\ ; \end{aligned}$$

dove $\nabla^\alpha f$ indica la matrice delle derivate α-esime di f nel senso delle distribuzioni (e $\nabla^0 f \equiv f$).
Come di consueto, indicheremo con $H^k(\Omega;\mathbb{R}^M)$ lo spazio $W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Inoltre, per $1 \le p < +\infty$, $W^{k,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ denota la chiusura di $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ nella norma di $W^{k,p}$ ed è uno spazio di Banach. A sua volta, $H^k_0(\Omega;\mathbb{R}^M) = W^{k,2}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ risulta essere spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare che, ad esempio per $k = 1$, è definito da

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{M}\left[\int_\Omega f_i(x)g_i(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\,dx\right]\ .$$

Nel caso in cui $N = 1$ e $\Omega = (a,b)$, $W^{1,1}\big((a,b);\mathbb{R}^M\big)$ si identifica con lo spazio delle funzioni assolutamente continue su (a,b).
Ricordiamo che, se p' è l'esponente coniugato di p, $W^{-k,p'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è lo spazio duale di $W^{k,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$; in particolare, per $k = 1$ ed $M = 1$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ è lo spazio duale di $W^{1,p}_0(\Omega)$ ed ogni elemento $\overline{g}$ di $W^{-1,p'}(\Omega)$ si può rappresentare nel modo seguente:

$$\overline{g} = g - \sum_{j=1}^{N}\partial_j g_j$$

dove $g, g_j \in L^{p'}(\Omega)$ e la derivata è intesa nel senso delle distribuzioni. Inoltre, se Ω è limitato, $h \leq k$ e $q < p$, allora $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset W^{h,q}(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

Ricordiamo anche che, per $1 < p < +\infty$, $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ (cosiccome $W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$) è riflessivo; inoltre, vale un risultato analogo a quello stabilito nel Teorema 1.10 per gli spazi L^p. Per semplicità assumiamo $M = 1$, visto che nel caso generale il risultato si ottiene ragionando per componenti ed introduciamo preliminarmente la definizione di convergenza debole negli spazi di Sobolev.

DEFINIZIONE 1.17. Sia $\{f_n\} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$. Sia dapprima $1 \leq p < +\infty$. Diremo che la successione $\{f_n\}$ converge debolmente ad $f \in W^{k,p}(\Omega)$ (e scriveremo $f_n \rightharpoonup f$ in $W^{k,p}(\Omega)$) se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ e tutte le derivate di f_n fino all'ordine k convergono debolmente in $L^p(\Omega)$ alle corrispondenti derivate di f. Analogamente, se $p = +\infty$, diremo che la successione $\{f_n\}$ converge $*$-debolmente ad $f \in W^{k,\infty}(\Omega)$ (e scriveremo $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $W^{k,\infty}(\Omega)$) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$ e tutte le derivate di f_n fino all'ordine k convergono $*$-debolmente in $L^\infty(\Omega)$ alle corrispondenti derivate di f.

TEOREMA 1.18.

Assumiamo che $\{f_n\}$ sia una successione debolmente convergente in $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, (rispettivamente, $*$-debolmente convergente in $W^{k,\infty}(\Omega)$). Allora essa è equilimitata.

Assumiamo che $\{f_n\}$ sia una successione equilimitata in $W^{k,p}(\Omega)$, $1 < p \leq +\infty$. Allora esiste una funzione $f \in W^{k,p}(\Omega)$ ed una sottosuccessione di $\{f_n\}$ debolmente convergente ad f per $1 < p < +\infty$ (rispettivamente $*$-debolmente convergente ad f per $p = +\infty$).

Infine, se $\{f_n\} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) e $f_n \rightharpoonup f \in W^{k,p}(\Omega)$ per $1 \leq p < +\infty$ (rispettivamente $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \in W^{k,\infty}(\Omega)$), allora

$$\|f\|_{k,p} \leq \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_{k,p} \,. \tag{1.5}$$

La disuguaglianza (1.5) è la semicontinuità inferiore della norma $W^{k,p}$, rispetto alla convergenza debole (vedi Def. 1.23).

Infine, se Ω è regolare (ad esempio $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$) e $1 \leq p < +\infty$, si ha che $\mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, rispetto alla norma definita sopra e, se Ω è limitato, $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ si identifica con lo spazio delle funzioni Lipschitziane.

TEOREMA 1.19 (Teorema di immersione).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato. Allora

(i) Se $1 \leq p < N$, $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset L^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$, per ogni $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ e l'immersione è compatta per $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.

(ii) Se $p = N$, $W_0^{1,N}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset L^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$, per ogni $1 \leq q < +\infty$ e l'immersione è compatta.

(iii) Se $p > N$, $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset \mathcal{C}_0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^M)$ e l'immersione è compatta.

Il precedente risultato continua a valere se si sostituisce $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, pur di assumere un'opportuna regolarità del bordo di Ω, ad esempio $\partial\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$.

Osserviamo che il Teorema 1.19 implica, in particolare, che, se $f_n \rightharpoonup f$ in $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ per $1 \leq p < +\infty$, allora $f_n \to f$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ (analogamente, se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, allora $f_n \to f$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$).

TEOREMA 1.20 (Disuguaglianza di Poincaré).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto, connesso, limitato, con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \le p < +\infty$. Allora,

(i) esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $f \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$, si ha

$$\|f\|_p \le c\|\nabla f\|_p \ ;$$

(ii) esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $f \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$, si ha

$$\|f - \overline{f}\|_p \le c\|\nabla f\|_p \ ,$$

dove $\overline{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)\ dx$.

OSSERVAZIONE 1.21. Osserviamo che la proprietà (i) vale più in generale per aperti limitati qualsiasi (cioè, non necessariamente connessi e con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$), mentre la proprietà (ii) vale anche per $p = +\infty$.

ESERCIZIO: Siano $p = 1$ ed $N = 1$. Dimostrare la disuguaglianza di Poincaré.

Osserviamo che la disuguaglianza di Poincaré implica, in particolare, che su $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ ($1 \le p < +\infty$), la norma L^p del gradiente costituisce una norma equivalente alla norma di $W^{1,p}$ e quindi tale spazio dotato della norma L^p del gradiente risulta essere uno spazio di Banach.

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati nei paragrafi precedenti, si rimanda a [2, 9].

1.5 Funzioni convesse e funzioni semicontinue inferiormente

DEFINIZIONE 1.22. Sia X uno spazio vettoriale e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che essa è *convessa* se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$

e per ogni x, y tali che $f(x), f(y) < +\infty$. Diremo che f è *strettamente convessa* se essa non è identicamente $+\infty$ e se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad \forall \alpha \in (0,1)$$

e per ogni $x \ne y$ tali che $f(x), f(y) < +\infty$.

ESERCIZIO: Sia $n \in \mathbb{N}$ ed $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dimostrare che, per ogni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$, con $\sum \alpha_i = 1$, e per ogni $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $f(x_i) < +\infty$, si ha

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \ .$$

ESERCIZIO: Sia I un insieme di indici (finito o infinito, numerabile o non). Per ogni $i \in I$, siano $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ delle funzioni convesse. Dimostrare che

$$f(x) := \sup_I f_i(x)$$

è una funzione convessa.

DEFINIZIONE 1.23. Sia (X, d) uno spazio metrico ed $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione assegnata. Diremo che essa è *semicontinua inferiormente* se, per ogni $x \in X$,

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \qquad \forall x_n \to x \text{ in } X\,.$$

In tal caso, scriveremo per semplicità f s.c.i.

OSSERVAZIONE 1.24. Osserviamo che, se f è convessa ed assume valore $-\infty$ in un estremo di un segmento, essa è finita al più in un punto di tale segmento; quindi se $x_0 \in X$, f è superiormente limitata in un intorno di x_0 e $f(x_0) = -\infty$, allora essa sarà identicamente uguale a $-\infty$ in tutto l'intorno considerato. Se f è convessa e s.c.i. ed assume valore $-\infty$ in un punto, allora essa non è mai finita.

A seguito dell'osservazione precedente, ci limiteremo a considerare solo funzioni che non assumano mai il valore $-\infty$. Ricordiamo che una funzione f è detta *propria* se $f(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$ e se esiste almeno un punto $\overline{x} \in X$ tale che $f(\overline{x}) < +\infty$; ovvero, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, non identicamente uguale a $+\infty$.

Terminiamo il paragrafo stabilendo un'importante disuguaglianza valida per le funzioni convesse.

TEOREMA 1.25 (Disuguaglianza di Jensen).
Sia $f : \mathbb{R}^M \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, propria e s.c.i. ed $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Allora

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(x)\ dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(g(x))\ dx\ ,$$

per ogni funzione $g \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$.

In realtà la disuguaglianza di Jensen vale in un contesto molto più generale, ma noi ci accontenteremo di questa versione particolare, poiché sarà quella effettivamente utile per le nostre applicazioni.

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati in questo paragrafo, si rimanda a [15, 17].

1.6 Funzioni di Carathéodory

DEFINIZIONE 1.26. Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione assegnata. Diremo che essa è di *Carathéodory* se, per ogni $s \in \mathbb{R}^M$ e per ogni $\xi \in \mathcal{M}^{M\times N}$, essa è misurabile nella prima variabile e se, per q.o. $x \in \Omega$, essa è continua nelle altre due variabili.

CAPITOLO 2
Metodi diretti e rilassamento.

In questa lezione ci occuperemo di risolvere il problema

$$\min\{F(u)\ :\ u \in X\}\ , \tag{2.1}$$

dove X è uno spazio metrico ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato.

Vogliamo stabilire sotto quali ipotesi è possibile ottenere l'esistenza di una (eventualmente unica) soluzione di (2.1). Per i nostri scopi, avremo che in generale X sarà uno spazio di Sobolev con opportune condizioni al bordo ed F sarà un funzionale integrale. Alcuni classici esempi sono:

ESEMPIO 2.1 Integrale di Dirichlet. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto, limitato e regolare e sia $\phi \in H^1(\Omega)$;

$$X = H^1_0(\Omega) + \phi\,, \qquad F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\,,$$

dove $H^1_0(\Omega) + \phi = \{u \in H^1(\Omega)\ :\ u - \phi \in H^1_0(\Omega)\}$.

ESEMPIO 2.2 Funzionale dell'area. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato sia $\phi \in W^{1,1}(\Omega)$;

$$X = W^{1,1}_0(\Omega) + \phi\,, \qquad F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\ dx\,,$$

dove $W^{1,1}_0(\Omega) + \phi = \{u \in W^{1,1}(\Omega)\ :\ u - \phi \in W^{1,1}_0(\Omega)\}$.

ESEMPIO 2.3 Funzionale dell'ottica geometrica. Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo reale limitato;

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}^M)\ :\ u(a) = u_0\ , u(b) = u_1\} \qquad F(u) = \int_I g(x, u)\sqrt{1 + (u')^2}\ dt\ .$$

Un primo approccio a questo tipo di problemi può essere fatto attraverso i cosiddetti metodi classici (di cui pionieri furono Bernoulli ed Eulero). Essi consistono nel determinare i punti critici $u \in X$ per il funzionale F, cioè i punti tali che $F'(u) = 0$, e poi studiare le derivate successive del funzionale in tali punti per stabilirne la natura. Questi metodi hanno però il difetto di dover assumere una regolarità del funzionale e dei punti critici che in generale potrebbe non essere presente. Un secondo e più recente approccio è stato invece sviluppato a partire dall'inizio del XX secolo da Hilbert e Lebesgue, in connessione con lo studio dell'integrale di Dirichlet. I metodi utilizzati in questo contesto sono stati poi generalizzati da Tonelli e sono attualmente noti come *Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni.* L'approccio con i Metodi Diretti si basa sostanzialmente sul classico Teorema di Weierstrass:

TEOREMA (di Weierstrass).

Sia X uno spazio metrico compatto (cioè dove è possibile estrarre da ogni successione limitata una sottosuccessione convergente in X) e sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione s.c.i., allora esiste un elemento $\overline{u} \in X$ tale che

$$F(\overline{u}) = \min\{F(u)\ :\ u \in X\}\,.$$

L'idea della dimostrazione di tale teorema è la seguente: si tratta di trovare delle successioni minimizzanti limitate (dalle quali sia quindi possibile estrarre sottosuccessioni convergenti) e sfruttare poi la s.c.i. del funzionale per ottenere che i punti limite sono in realtà punti di minimo per il funzionale considerato.

DEFINIZIONE 2.4. Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che una successione $\{u_n\} \subseteq X$ è *minimizzante* per il funzionale F su X se

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_X F \ .$$

Osserviamo che compattezza e s.c.i. sono proprietà topologicamente in competizione fra loro, in quanto le proprietà di compattezza si ottengono più facilmente in topologie meno ricche mentre le proprietà di continuità si ottengono più facilmente in topologie più fini. Per tale ragione, è essenziale, una volta assegnati F ed X, scegliere opportunamente la topologia in cui si intende lavorare, per bilanciare le due richieste.

DEFINIZIONE 2.5. Sia X uno spazio normato e $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato. Diremo che F è *coercivo* se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\lim_{\|u\|_X\to+\infty} \frac{F(u)}{\|u\|_X} \geq \alpha > 0 \ . \tag{2.2}$$

Se il funzionale F non vale identicamente $+\infty$, cioè se $\inf F < +\infty$, la condizione di coercività implica che le successioni minimizzanti sono limitate. Questa sarà una proprietà essenziale al fine di risolvere il problema di minimo, come vederemo nel Teorema 2.6.

Per tornare al nostro problema iniziale (2.1), supporremo che $X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ oppure $X = W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) + \phi$, con $\phi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, $1 < p < +\infty$, e Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con bordo regolare.

TEOREMA 2.6.
Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale coercivo e s.c.i. rispetto alla convergenza debole di X, cioè

$$F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n)\,, \qquad \forall\ u_n \rightharpoonup u \text{ in } X.$$

Allora il problema (2.1) ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione. Se $F \equiv +\infty$, ogni punto $u \in X$ è punto di minimo. In caso contrario, si ha $\inf_X F(u) < +\infty$. Allora, se $\{u_n\} \subseteq X$ è una successione minimizzante, esiste $c > 0$ tale che $F(u_n) \leq c$ e, quindi, dalla coercività segue anche che esiste $c' > 0$ tale che $\|u_n\|_X \leq c'$. Pertanto, ogni successione minimizzante è limitata. Per il Teorema 1.18, possiamo estrarre una sottosuccessione, che denoteremo ancora con $\{u_n\}$, debolmente convergente ad un punto $\overline{u} \in X$. Dalla s.c.i. debole di F si ricava allora

$$\inf_X F(u) \leq F(\overline{u}) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_X F(u) \ .$$

Quindi $\overline{u}$ è punto di minimo. □

Per quanto riguarda l'unicità della soluzione, enunciamo il seguente risultato.

TEOREMA 2.7.

Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale strettamente convesso. Allora il problema (2.1) ammette al più una soluzione.

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che esistano $u, v \in X$, con $u \neq v$, tali che

$$F(u) = F(v) = \min_{w \in X} F(w) \, .$$

Allora, dalla stretta convessità segue

$$F\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) < \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(v) = \min_{w \in X} F(w) \, ,$$

cioè $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ è un punto in cui F raggiunge un valore strettamente inferiore al suo minimo. Questo è assurdo e quindi la tesi è dimostrata. □

Purtroppo negli spazi infinito dimensionali, quali il nostro X, dalle successioni limitate, in generale, non è possibile estrarre sottosuccessioni fortemente convergenti, quindi sulle successioni minimizzanti non possiamo ottenere nulla di meglio che la convergenza debole. Per tale ragione, siamo interessati a stabilire delle condizioni che garantiscano la debole s.c.i. dei nostri funzionali integrali, in particolare per poter risolvere il problema iniziale (1.2) nei casi che ci interesseranno. A questo scopo consideriamo il funzionale $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definito da

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u) \, dx \, , \tag{2.3}$$

con $f : \Omega \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory, e ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente per la convessità di tale funzionale è la convessità della funzione integranda rispetto alla seconda variabile. Inoltre la convessità di f è una condizione sufficiente per la s.c.i. rispetto alla convergenza debole. Essa diventa anche condizione necessaria per la debole s.c.i., qualora $N = 1$ o $M = 1$, come si ricava dal teorema seguente, che è una versione ridotta di un ben noto risultato dovuto a Tonelli.

TEOREMA 2.8.

Sia $f : \Omega \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Assumiamo che esista un numero reale $\lambda > 0$ tale che

$$|f(x, \xi)| \leq \lambda(1 + |\xi|^p) \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega \, , \text{ per ogni } \xi \in \mathcal{M}^{M\times N} \, . \tag{2.4}$$

Sia $F : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$ il funzionale definito in (2.3) e assumiamo che $N = 1$ oppure $M = 1$. Allora le seguenti affermazioni

(i) $f(x, \cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$;
(ii) il funzionale F è convesso su $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$;
(iii) il funzionale F è s.c.i. rispetto alla convergenza debole su $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$;

sono equivalenti.

Come conseguenza dei Teoremi 2.6 e 2.8, otteniamo il seguente risultato sull'esistenza del minimo.

TEOREMA 2.9.

Sia $1 < p < +\infty$ *e sia* $f : \Omega \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile in* x *e convessa in* ξ. *Assumiamo che esistano* $0 < \lambda < \Lambda < +\infty$ *tali che*

$$\lambda(|\xi|^p - 1) \le f(x,\xi) \le \Lambda(1 + |\xi|^p) \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega \quad \textit{e per ogni } \xi \in \mathcal{M}^{M\times N} \; . \tag{2.5}$$

Sia $F : W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$ *il funzionale definito in (2.3) e assumiamo che* $N = 1$ *oppure* $M = 1$. *Allora, esiste* $u_0 \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ *tale che*

$$F(u_0) = \min_{u \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)} F(u) \; .$$

Come si può ricavare dai prossimi esempi, per garantire l'esistenza di un punto di minimo, non è possibile in generale indebolire l'ipotesi di coercività del funzionale (vedi Esempio 2.10) né quella di convessità dell'integranda rispetto a ξ, che (come evidenziaro nel Teorema di Tonelli) è strettamente connessa alla debole s.c.i. del funzionale (vedi Esempi 2.11 e 2.12).

ESEMPIO 2.10. (Mancanza di coercività) Siano $\Omega = (0,1)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definita da $f(x,\xi) = x\xi^2$, $\phi(x) = 1 - x$ ed $X = H^1_0(0,1) + \phi$. Definiamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 x(u')^2 \, dx \ge 0 \qquad \forall u \in X \, .$$

Dal teorema precedente, poiché $f(x,\cdot)$ è convessa, si ottiene che F è debolmente s.c.i.. Tuttavia, posta

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 1/n \; , \\ \\ -\log x / \log n & \text{se } 1/n \le x \le 1 \; , \end{cases}$$

è facile verificare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in X$ e $F(u_n) \to 0$, per $n \to +\infty$. Quindi $\inf F = 0$, ma la condizione $F(u) = 0$ è incompatibile con le condizioni al bordo richieste, quindi il funzionale non ammette punto di minimo. In effetti (vedi esercizio sotto punto (i)) il funzionale F non è coercivo.

ESEMPIO 2.11. (Mancanza di s.c.i.) Siano $\Omega = (0,1)$, $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definita da $f(\xi) = (1-\xi^2)^2$ ed $X = W^{1,4}_0(\Omega)$. Definiamo, per ogni $u \in X$,

$$G(u) = \int_0^1 [1 - (u')^2]^2 \, dx \qquad \text{e} \qquad F(u) = G(u) + \int_0^1 u^2 \, dx \; .$$

Chiaramente f soddisfa le condizioni di crescita (2.4) con $p = 4$ e $\lambda = 4$, ma non è convessa, pertanto il funzionale G (e quindi F) non è s.c.i. rispetto alla convergenza debole di X. Inoltre, il problema di minimo per F non ha soluzione, nonostante F sia coercivo. Consideriamo, infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $u_n(x) = \frac{1}{n}u(nx)$, $x \in [0,1]$, dove $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \; , \\ 1 - x & \text{se } 1/2 \le x \le 1 \; , \end{cases}$$

e poi prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Un semplice calcolo mostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in W^{1,4}_0(0,1)$ e $u_n' = \pm 1$, quindi $G(u_n) = 0$. Inoltre, $\int_0^1 u_n^2 \, dx = \frac{1}{12n^2}$, quindi $F(u_n) \to 0$ per $n \to +\infty$, ovvero $\inf F = 0$. Tuttavia $F(u) > 0$ per ogni $u \in X$, poiché $F(u) = 0$ è soddisfatta solo se $u = 0$ e $u' = \pm 1$, che sono condizioni fra loro incompatibili.

ESEMPIO 2.12. (Mancanza di s.c.i.) Siano $\Omega = (0,1)^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ definita da $f(\xi) = (\xi_1^2 - 1)^2 + \xi_2^4$, $X = W_0^{1,4}(\Omega)$ ed $F : X \to [0,+\infty)$ il funzionale definito da

$$F(u) = \int_\Omega \left\{ [(\partial_x u)^2 - 1]^2 + (\partial_y u)^4 \right\} \, dx \, dy \, .$$

Si verifica facilmente che il funzionale F non è debolmente s.c.i. su X. Inoltre, nonostante F sia coercivo, il problema di minimo non ammette soluzione. Infatti, si può dimostrare che $\inf_X F = 0$, ma la richiesta $F(u) = 0$ impone che $(\partial_1 u)^2 = 1$ e $\partial_2 u = 0$ e quindi, unitamente alla condizione di annullamento sul bordo di Ω, si ottiene necessariamente $u = 0$ in Ω, da un lato, e u non costante rispetto alla prima variabile, dall'altro lato. Queste due richieste sono ovviamente incompatibili, quindi $F(u) > 0$ in X e l'estremo inferiore non è mai raggiunto.

ESERCIZIO:

(i) Verificare che il funzionale dell'Esempio 2.10 non è coercivo su Y.

(ii) Dimostrare che il funzionale F dell'esempio 2.11 è coercivo ($f(\xi) \geq \frac{1}{3}|\xi|^4 - 3$).

(iii) Dimostrare che il funzionale dell'Esempio 2.12 è coercivo ($f(\xi) \geq \frac{1}{6}|\xi|^4 - 3$), ma non debolmente s.c.i., poiché non è convesso.

ESERCIZIO: Sia $f \in L^2(\Omega)$ ed $X = H^1(\Omega)$. Verificare che il problema di minimo

$$\min_X \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega f(x) u \, dx \right\}$$

non ammette soluzione ($\inf F = -\infty$ prendendo $u_n = n \to +\infty$).

Osserviamo che, se le ipotesi del Teorema 2.6 non sono soddisfatte, non si possono applicare i Metodi Diretti ed in effetti, come evidenziato negli Esempi 2.10, 2.11 e 2.12, il problema di minimo può non avere soluzione. D'altre parte, in alcuni casi, pur non potendo affrontare il problema con i Metodi Diretti, il minimo potrebbe esistere comunque. Per esempio, consideriamo il funzionale $F : W_0^{1,4}(0,1) \to [0,+\infty)$ definito da

$$F(u) = \int_0^1 [1 - (u')^2]^2 \, dx \qquad \forall u \in W_0^{1,4}(0,1) \; .$$

Chiaramente, F non è convesso nè s.c.i., quindi non si può utilizzare il Teorema 2.6 per studiare il problema di minimo corrispondente. Tuttavia, si vede facilmente che esistono infiniti punti di minimo dati dalle funzioni u_n costruite nell'Esempio 2.11. Infatti, un semplice calcolo mostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in W_0^{1,4}(0,1)$ e $u_n' = \pm 1$. Quindi $F(u_n) = 0$ e, poiché $F(u) \geq 0$, per ogni $u \in W_0^{1,4}(0,1)$, tutte le funzioni u_n sopra definite sono punti di minimo per F.

In situazioni di questo tipo, affinché i Metodi Diretti possano ancora essere efficaci, è necessario *rilassare* il problema, ovvero passare ad un funzionale (e talora ad uno spazio) differente, ottenendo un nuovo problema di minimo (opportunamente legato al problema originario), per il quale ci siano contemporaneamente compattezza delle successioni minimizzanti e s.c.i. del funzionale. Sotto opportune ipotesi, il problema rilassato mantiene dei legami essenziali con il problema originario; in particolare, l'estremo inferiore del problema originario coincide con il minimo del nuovo problema e le successioni minimizzanti del problema originario convergono a punti di minimo del nuovo problema. Pertanto lo studio del problema rilassato fornisce utili informazioni su quello originario.

Sia X uno spazio metrico ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato. Chiamiamo *rilassato* (o inviluppo semicontinuo inferiormente) di F il funzionale $sc^-(F) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definito da

$$sc^-(F)(u) = \inf\{\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \ : \ \forall \{u_n\} \subseteq X \text{ tale che } u_n \to u\}\,;$$

il rilassato è caratterizzato dalle seguenti due disuguaglianze:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \text{per ogni } u \in X \text{ e per ogni successione } u_n \to u \text{ si ha} \\ &\qquad sc^-(F)(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n)\ ; \\ &(ii) \qquad \text{per ogni } u \in X \text{ esiste una successione } \overline{u}_n \to u \text{ tale che} \\ &\qquad sc^-(F)(u) \geq \limsup_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n)\ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

In particolare, da (i) e (ii) si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) = sc^-(F)(u)\,.$$

Chiameremo, pertanto, $\{\overline{u}_n\}$ *successione ottimale* per $sc^-(F)(u)$.

OSSERVAZIONE 2.13. Osserviamo che, come si può facilmente dimostrare, se $G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è un funzionale continuo su X, allora

$$sc^-(F+G) = sc^-(F) + G\ .$$

Il funzionale rilassato è chiaramente s.c.i. ed è il più grande funzionale s.c.i. che minora F. Inoltre, sotto opportune ipotesi, si ha $\min_X sc^-(F) = \inf_X F$.

Il nostro scopo sarà quello di ottenere una rappresentazione esplicita per il rilassato, quando $X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ o $X = W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è un funzionale integrale della forma data in (2.3), cioè

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)\ dx\ ,$$

dove $f : \Omega\times\mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory. D'altra parte, se f soddisfa la condizione di crescita

$$f(x,\xi) \geq -\lambda_1 - \lambda_2|\xi|^p \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathcal{M}^{M\times N}\ ,$$

dove $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$ e $1 \leq p < +\infty$, come conseguenza del Teorema 1.12 (i), si ricava che F è s.c.i. nella topologia forte di X e quindi esso coincide con $sc^-(F)$. Pertanto, $sc^-(F)$ è completamente identificato e non c'è nulla da dimostrare. Tuttavia, nel nostro caso concreto, X non è semplicemente uno spazio metrico, ma uno spazio di Banach, quindi è ivi definita in modo naturale anche una convergenza debole. Noi ci concentreremo, perciò, sul problema del rilassamento, quando si considera su X la convergenza debole.

Osserviamo che se f soddisfa

$$f(x,\xi) \geq \lambda|(\xi|^p - 1) \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ e per ogni } \xi \in \mathcal{M}^{M\times N}\ , \tag{2.7}$$

dove $\lambda > 0$ e $1 < p < +\infty$, allora, anche il rilassato rispetto alla convergenza debole di X si può caratterizzare mediante le condizioni (2.6). Più precisamente, si ottiene che il rilassato in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza debole coincide con il rilassato rispetto alla convergenza forte di L^p, come stabilito nel seguente teorema.

TEOREMA 2.14.

Sia $f : \Omega\times\mathcal{M}^{M\times N} \to [0,+\infty)$ una funzione di Carathéodory soddisfacente la condizione di crescita (2.7). Siano $X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ il funzionale definito in (2.3). Allora

$$sc^-_{L^p}(F)(u) = sc^-_{w-W^{1,p}}(F)(u) \qquad \forall u \in X\,,$$

dove $sc^-_{L^p}(F)$ e $sc^-_{w-W^{1,p}}(F)$ indicano, rispettivamente, il rilassato di F rispetto alla convergenza forte di L^p e il rilassato di F rispetto alla convergenza debole di $W^{1,p}$.

Dimostrazione. Ovviamente,

$$sc^-_{L^p}(F)(u) \le sc^-_{w-W^{1,p}}(F)(u) \qquad \forall u \in X\,,$$

poiché dai Teoremi 1.18 e 1.19, si ottiene che, per ogni $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $u_n \rightharpoonup u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ (debolmente in $W^{1,p}$), $u_n \to u$ forte in L^p. La tesi sarà quindi dimostrata, una volta provata la disuguaglianza opposta.

Se $sc^-_{L^p}(F)(u) = +\infty$, la tesi segue banalmente.

Se, invece, $sc^-_{L^p}(F)(u) < +\infty$, per ogni successione $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $u_n \to u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ forte in L^p e $\{F(u_n)\}$ è limitata, da (2.7) si ricava che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}$. Quindi, se $\{\overline{u}_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è ottimale per $sc^-_{L^p}(F)(u)$, si ottiene $sc^-_{L^p}(F)(u) = \lim_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) \ge sc^-_{w-W^{1,p}}(F)(u)$, da cui segue la tesi. □

Come conseguenza del precedente teorema, indicheremo semplicemente con $sc^-(F)$ il rilassato di F, inteso, indifferentemente, rispetto alla convergenza debole di $W^{1,p}$ o alla convergenza forte di L^p.

Il prossimo teorema evidenzia, invece, l'interesse del rilassamento nello studio dei problemi di minimo.

TEOREMA 2.15.

Sia $f : \Omega \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory soddisfacente la condizione di crescita (2.5). Siano $X = W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ed $F : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito in (2.3). Allora $sc^-(F)$ ammette almeno un punto di minimo in X e

$$\inf_{u\in X} F(u) = \min_{u\in X} sc^-(F)(u)\ . \tag{2.8}$$

Inoltre, per ogni punto di minimo $u_0 \in X$ di $sc^-(F)$, esiste una successione $\{\overline{u}_n\} \subseteq X$ minimizzante per F convergente ad u_0. Infine, ogni successione minimizzante per F ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di minimo di $sc^-(F)$.

Dimostrazione. Dalla definizione di rilassato e dalla condizione (2.5), si può facilmente ricavare che

$$\lambda(\|Du\|_p^p - |\Omega|) \le sc^-(F)(u) \le \Lambda(|\Omega| + \|Du\|_p^p)\,,$$

ovvero $sc^-(F)$ è coercivo. Essendo anche s.c.i., dal Teorema 2.6 si ricava che $sc^-(F)$ ammette almeno un punto di minimo in X. Ovviamente, poiché $sc^-(F)(u) \le F(u)$, per ogni $u \in X$, si ha anche $\min_X sc^-(F) \le \inf_X F$.

Sia ora $u_0 \in X$ un punto di minimo per $sc^-(F)$ e sia $\{\overline{u}_n\} \subseteq X$ una successione ottimale per $sc^-(F)(u_0)$, allora

$$\min_{u\in X} sc^-(F)(u) = F(u_0) = \lim_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) \ge \inf_{u\in X} F(u)\,. \tag{2.9}$$

La (2.8) è dunque dimostrata. Inoltre, osserviamo anche che $\{\overline{u}_n\}$ è una successione minimizzante, poiché da (2.8) e (2.9) si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} F(\overline{u}_n) = \inf_{u\in X} F(u)\,.$$

Infine, sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante. Da (2.5) e dal Teorema 1.18, si ottiene che, a meno di sottosuccessioni, $\{u_n\}$ converge debolmente in $W^{1,p}$ ad una funzione $\overline{u} \in X$ e

$$sc^-(F)(\overline{u}) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{u\in X} F(u) = \min_{u\in X} sc^-(F)(u)\,.$$

Pertanto, $\overline{u}$ è punto di minimo per $sc^-(F)$. □

Concludiamo con un teorema di rappresentazione per il funzionale rilassato.

TEOREMA 2.16.

Sia $f : \Omega\times\mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory soddisfacente le condizioni di crescita (2.5). Siano $X = W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, $1 < p < +\infty$, ed $F : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito in (2.3). Assumiamo $M = 1$ oppure $N = 1$. Allora

$$sc^-(F)(u) = \int_\Omega co(f)(x,\nabla u)\;dx \qquad \forall u \in X\,.$$

dove $co(f) : \Omega \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ è l'inviluppo convesso di $f(x,\cdot)$.

Tornando all'Esempio 2.11, se rilassiamo il funzionale ivi considerato, otteniamo

$$sc^-(F)(u) = \int_0^1 co(f)(u')\;dx + \int_0^1 u^2\;dx\,, \qquad \text{dove} \qquad co(f)(\xi) = \begin{cases} (1-\xi^2)^2 & \text{se } |\xi| > 1, \\ 0 & \text{se } -1 \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Il nuovo funzionale, grazie al Teorema 2.8, è s.c.i. rispetto alla convergenza debole su $W_0^{1,4}(\Omega)$ ed inoltre è coercivo poiché $co(f)(\xi) \ge \frac{1}{3}(|\xi|^4 - 3)$, pertanto il corrispondente problema di minimo ammette soluzione. Più precisamente, il minimo del rilassato è ottenuto sulla funzione $\overline{u}(x) \equiv 0$ e si ha $\min sc^-(F)(u) = 0 = \inf F(u)$.

Osserviamo che i risultati dei Teoremi 2.15 e 2.16 sono indipendenti dal dato al bordo, ovvero continuano a valere anche sostituendo a $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) + \phi$, dove $\phi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

Tali risultati permetteranno, una volta definiti gli spazi funzionali di lavoro e le opportune condizioni di crescita del funzionale, di garantire la risolubilità almeno del problema di minimo (1.2).

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati in questo capitolo, si rimanda a [13, 14].

CAPITOLO 3

Γ-convergenza: caso $p > 1$. Formule di omogeneizzazione.

Il problema affrontato nella precedente lezione può essere generalizzato al caso di una famiglia di funzionali $F_\varepsilon : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo di considerare, per ogni $\varepsilon > 0$, il problema di minimo

$$\min\{F_\varepsilon(u) \ : \ u \in X\} \ , \tag{3.1}$$

e di avere, in corrispondenza, una famiglia di minimi $\{u_\varepsilon\} \subset X$ o, più in generale, una successione *minimizzante*, cioè una successione di funzioni che soddisfino la condizione

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) < \inf\{F_\varepsilon(u) \ : \ u \in X\} + \varepsilon \ .$$

È naturale chiedersi se esista un funzionale limite e se, in caso affermativo, la successione minimizzante abbia qualche relazione con il minimo (a patto che esista) del funzionale limite. Il problema presentato nella prima lezione, da cui prende l'avvio questo minicorso, si inquadra esattamente in questo contesto.

Come anticipato nella lezione introduttiva, a questo scopo è stata introdotta da De Giorgi negli anni '70 una nozione di convergenza variazionale, la cosiddetta Γ-*convergenza*, che fornisce un metodo estremamente generale per affrontare questo tipo di problemi.

DEFINIZIONE 3.1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un funzionale $\overline{F} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice Γ-limite della successione $\{F_n\}$ se

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \text{per ogni } u \in X \text{ e per ogni successione } u_n \to u \text{ si ha} \\ &\qquad \overline{F}(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F_n(u_n) \ ; \\ &(ii) \quad \text{per ogni } u \in X \text{ esiste una successione } \overline{u}_n \to u \text{ tale che} \\ &\qquad \overline{F}(u) \ge \limsup_{n\to+\infty} F_n(\overline{u}_n) \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

OSSERVAZIONE 3.2. Rimarchiamo subito che il Γ-limite, se esiste, è unico. Inoltre esso gode delle seguenti proprietà:

1. $\overline{F}$ è s.c.i..
2. Una successione Γ-converge se e solo se ogni sua sottosuccessione Γ-converge al medesimo limite.
3. Se $F_n \xrightarrow{\Gamma} \overline{F}$ e G è un funzionale continuo su X, allora $F_n + G \xrightarrow{\Gamma} \overline{F} + G$.
4. Il Γ-limite di funzionali convessi è un funzionale convesso.
5. Il Γ-limite di una successione di funzionali positivamente omogenei (di qualunque grado) è positivamente omogeneo del medesimo grado.
6. Il Γ-limite di una successione di forme quadratiche è una forma quadratica, cioè $F(u+v) + F(u-v) = 2F(u) + 2F(v)$.
7. Sotto opportune ipotesi si ha: $\begin{cases} \inf(\min) F_n \to \min \overline{F}\,; \\ \text{se } \{u_n\} \text{ è una successione minimizzante (una successione} \\ \text{di minimi), allora } u_n \to u \text{ dove } u \text{ è minimo per } \overline{F}\,. \end{cases}$
8. La Γ-convergenza è indipendente dalla convergenza puntuale; in particolare, se $F_n \equiv F$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $F_n \xrightarrow{\Gamma} sc^-(F)$.

Per quanto riguarda l'ultima osservazione, segnaliamo il seguente controesempio.

ESEMPIO 3.3. Sia (X, d) lo spazio $\mathbb{R}$ dotato dell'usuale metrica euclidea e consideriamo la successione di funzioni

$$F_n(x) = nx\mathrm{e}^{-2n^2x^2}\,.$$

Ovviamente, $F_n(x) \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tuttavia, tenendo conto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\min F_n = F_n(-1/2n) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1/2}$, si può facilmente verificare che $F_n \xrightarrow{\Gamma} \overline{F}$, dove

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1/2} & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

La proprietà che rende la Γ-convergenza uno strumento così potente è enunciata nel seguente teorema di compattezza.

TEOREMA 3.4.
Sia (X, d) uno spazio metrico ed $F_\varepsilon : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$, una famiglia di funzionali. Allora esiste una sottosuccessione, denotata con $\{\varepsilon_n\}$, ed un funzionale $\overline{F} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $F_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\Gamma} \overline{F}$.

Torniamo ora al caso particolare della famiglia dei funzionali introdotti nella prima lezione, cioè

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du(x)\right)\, dx \qquad \text{oppure} \qquad F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{u(x)}{\varepsilon}, Du(x)\right)\, dx\,, \tag{3.3}$$

dove assumeremo che $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ o $u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto regolare, $1 < p < +\infty$) ed f sia una funzione tale che

$$f \text{ è di Carathéodory;} \tag{3.4}$$

$$f(\cdot, \xi) \text{ è 1-periodica per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.5}$$

Assumeremo anche che f soddisfi le cosiddette condizioni di crescita standard date da

$$\lambda(|\xi|^p - 1) \le f(s, \xi) \le \Lambda(1 + |\xi|^p) \qquad \forall \xi \in \mathcal{M}^{M\times N} \text{ e } \forall s\,, \tag{3.6}$$

dove s denota $x \in \Omega$ o $u \in \mathbb{R}^M$, a seconda dei casi. Qui $0 < \lambda < \Lambda < +\infty$. Infine, come nel caso del rilassamento, noi saremo interessati al Γ-limite fatto rispetto alla convergenza forte di L^p, o equivalentemente rispetto alla convergenza debole di $W^{1,p}$. Grazie alla condizione di crescita (3.6) e rifrasando il risultato del Teorema 2.14, si ottiene che queste due nozioni sono equivalenti e che anche il Γ-limite rispetto alla convergenza debole può essere caratterizzato come nella Definizione 3.1, nonostante la convergenza debole non sia metrizzabile.

Per funzionali soddisfacenti le proprietà richieste è possibile dimostrare il seguente teorema, che giustifica pienamente l'importanza della Γ-convergenza nel trattare i problemi che ci siamo posti all'inizio (vedi anche il punto 7) dell'Osservazione 3.2).

TEOREMA 3.5.

Sia $\{F_{\varepsilon_n}\}$ una successione di funzionali del tipo (3.3) dove l'integranda f soddisfa (3.4), (3.5) e (3.6). Assumiamo che $\{F_{\varepsilon_n}\}$ sia Γ-convergente su $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ad un funzionale $\overline{F}$. Allora $\overline{F}$ ammette almeno un punto di minimo su $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\{F_{\varepsilon_n}(u) \ : \ u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)\} = \min\{\overline{F}(u) \ : \ u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)\}\,. \tag{3.7}$$

Inoltre, se $\{u_n\}$ è una successione minimizzante per $\{F_{\varepsilon_n}\}$, a meno di sottosuccessioni, $\{u_n\}$ converge ad un punto di minimo per $\overline{F}$. Infine, se $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è punto di minimo per $\overline{F}$, esiste una successione $\{\overline{u}_n\}\subseteq W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ minimizzante per F_{ε_n} convergente a u_0.

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella fatta per il Teorema 2.15.

Osserviamo che dalla definizione di Γ-convergenza, dalle condizioni di crescita (3.6) e dalla s.c.i. della norma rispetto alla convergenza debole (vedi Teorema 1.10 con $f_n=\nabla u_n$) si ottiene subito

$$\lambda\Big(\int_\Omega |Du|^p\,dx - |\Omega|\Big) \le \overline{F}(u) \le \Lambda\Big(|\Omega| + \int_\Omega |Du|^p\,dx\Big)\,,$$

ovvero $\overline{F}$ è coercivo. Pertanto, poiché $\overline{F}$ è anche s.c.i. (ricorda Osservazione 3.2), dal Teorema 2.6 si ricava che esiste una funzione $\overline{u}\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ che realizza il minimo di $\overline{F}$. A sua volta, per la definizione di Γ-convergenza, esiste un successione $\{\overline{u}_n\}\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $\overline{u}_n\to\overline{u}$ e

$$\begin{aligned}\min\{\overline{F}(u) \ : \ u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)\} &= \overline{F}(\overline{u}) = \lim_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(\overline{u}_n)\\ &\ge \limsup_{n\to+\infty}\, \inf\{F_{\varepsilon_n}(u) \ : \ u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

D'altra parte, sia $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ una successione minimizzante, cioè tale che

$$\liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n) \le \liminf_{n\to+\infty}\,[\inf F_{\varepsilon_n}]\,.$$

Dalle condizioni di crescita (3.6) e dalla (3.8), avremo anche che, a meno di sottosuccessioni, $u_n\to u_0\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ forte in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Quindi per definizione, otterremo

$$\overline{F}(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n) \le \liminf_{n\to+\infty}\,[\inf F_{\varepsilon_n}]\,,$$

ovvero

$$\min\{\overline{F}(u) \ : \ u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)\} \le \overline{F}(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty}\, \inf\{F_{\varepsilon_n}(u) \ : \ u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)\}\,. \tag{3.9}$$

Da (3.8) e (3.9) si ottiene (3.7); inoltre, tutte le disuguaglianze sono in realtà delle uguaglianze, cosicché u_0 è punto di minimo per $\overline{F}$ e la successione $\{\overline{u}_n\}$ è minimizzante per $\{F_{\varepsilon_n}\}$. □

OSSERVAZIONE 3.6. Consideriamo la successione dei funzionali $\{F_\varepsilon\}$ definiti in (3.3), operanti sulle funzioni $u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$, con $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ed $N=1$ oppure $M=1$. Il Teorema 3.4 garantisce l'esistenza di un funzionale limite (almeno operando per sottosuccessioni). Il Teorema 3.5, a sua volta, garantisce che il problema di minimo (1.2) ammette soluzione. Tuttavia allo stato attuale il Γ-limite resta solo un funzionale astratto. Il nostro scopo sarà, quindi, da un lato, di stabilire un risultato di rappresentazione integrale per tale funzionale, mediante un integrando convesso φ indipendente da x (o da u, rispettivamente) e soddisfacente opportune condizioni di crescita; dall'altro, quello di ottenere una rappresentazione esplicita per φ, che risulti essere indipendente dalla sottosuccessione.

In realtà, funzionali del tipo (3.3), una volta fissata la funzione $u \in X$ (dove $X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ o $X = W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$), possono essere riguardati come funzionali d'insieme definiti sugli aperti A di Ω. Denotiamo tali funzionali con $F_\varepsilon(A,u)$, in modo tale che $F_\varepsilon(\Omega,u) = F_\varepsilon(u)$, ed osserviamo che, come funzioni d'insieme, essi si comportano come delle misure. Osserviamo, inoltre, che il teorema di compattezza della Γ-convergenza (Teorema 3.4) vale in una versione più forte, che garantisce l'esistenza di una sottosuccessione $\{\varepsilon_n\}$ ed un funzionale $\overline{F}$ tale che

$$\overline{F}(A,u) = \Gamma - \lim_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(A,u)$$

per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ e per ogni $u \in X$. Si possono infine dimostrare le seguenti proprietà per il Γ-limite:

1) (*misura*) per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ e per ogni $u \in X$, la funzione d'insieme $A \mapsto \overline{F}(A,u)$ è la restrizione agli aperti di Ω di una misura di Borel regolare;
2) (*s.c.i.*) per ogni aperto $A \subseteq \Omega$, la funzione $u \in X \mapsto \overline{F}(A,u)$ è s.c.i. (rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$);
3) (*crescita standard*) per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ e per ogni $u \in W^{1,p}(A;\mathbb{R}^M)$, vale la disuguaglianza
$$\lambda(\int_A |Du|^p\,dx - |A|) \le \overline{F}(A,u) \le \Lambda(|A| + \int_A |Du|^p\,dx)\,;$$
4) (*località*) per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ e per ogni $u, v \in X$ t.c. $u = v$ q.o. su A, $\overline{F}(A,u) = \overline{F}(A,v)$;
5) (*invarianza per traslazioni*) per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^N$, $\overline{F}(A,u+z) = \overline{F}(A,u)$.

I funzionali soddisfacenti le condizioni sopra sono del tutto speciali, poiché per essi è possibile dimostrare il seguente risultato di rappresentazione integrale, dovuto a Buttazzo-Dal Maso (vedi [10, Theorem 1.1].

TEOREMA 3.7.

Assumiamo che $\mathcal{A}(\Omega)$ sia la famiglia dei sottoinsiemi aperti di Ω e che $\overline{F} : \mathcal{A}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p > 1$, sia un funzionale soddisfacente tutte le precedenti condizioni 1)–5). Allora esiste una funzione di Carathéodory $\varphi : \Omega \times \mathcal{M}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ soddisfacente (3.6) tale che

$$\overline{F}(A,u) = \int_A \varphi(x, Du)\,dx$$

per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ e per ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Inoltre, se assumiamo $N = 1$ oppure $M = 1$, la funzione $\varphi(x,\cdot)$ risulta anche essere convessa per q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. La dimostrazione procede per passi.

Step 1. Utilizzando il Teorema di rappresentazione di Riesz, si dimostra la tesi per funzioni lineari (cioè della forma $u_\xi(x) = \xi \cdot x$).

Step 2. Il risultato precedente si estende al caso delle funzioni lineari a tratti.

Step 3. Si passa poi al caso generale per approssimazione con funzioni lineari a tratti.

Step 4. Infine, la convessità di φ si può ottenere utilizzando il cosiddetto "*zig-zag lemma*" (vedi [10, Lemma 1.5] e [14, Lemma 20.2]), che sostanzialmente consiste nell'approssimare una funzione lineare di pendenza $\xi = \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2$ con una successione di funzioni lineari a tratti che abbiano pendenza ξ_1 in una porzione di spazio di misura α e pendenza ξ_2 in una porzione di spazio di misura $(1-\alpha)$. □

OSSERVAZIONE 3.8. Osserviamo che la richiesta $N = 1$ oppure $M = 1$ è naturale per gli scopi di queste lezioni, ma non è assolutamente necessaria per la validità del precedente teorema di rappresentazione. Tuttavia, in mancanza di questa ipotesi, la funzione integranda è caratterizzata da proprietà di convessità più generali di quella standard, che esulano dai nostri attuali interessi.

Un altro risultato fondamentale in questo ambito è l'indipendenza del Γ-limite dalle condizioni al bordo, che è stabilito nel prossimo teorema. Questo risultato chiarisce meglio anche l'ultima osservazione del capitolo precedente.

TEOREMA 3.9.

Sia $\{F_\varepsilon\}$ la famiglia di funzionali definiti in (3.3), la cui integranda soddisfi (3.4), (3.5) e (3.6). Sia $\{F_{\varepsilon_n}\}$ una sottosuccessione di $\{F_\varepsilon\}$ Γ-convergente su $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ad un funzionale $\overline{F}$. Definiamo

$$F^0_\varepsilon(u) = \begin{cases} F_\varepsilon(u) & \textit{se } u \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M), \\ +\infty & \textit{altrove in } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M), \end{cases} \quad \text{e} \quad \overline{F}^0(u) = \begin{cases} \overline{F}(u) & \textit{se } u \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M), \\ +\infty & \textit{altrove in } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M). \end{cases}$$

Allora $F^0_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\Gamma} \overline{F}^0$.

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene provando che valgono le due disuguaglianze

$$\overline{F}^0 \geq \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F^0_{\varepsilon_n} \qquad \text{e} \qquad \overline{F}^0 \leq \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F^0_{\varepsilon_n}\,.$$

Omettiamo la dimostrazione della prima disuguaglianza, che si basa su un delicato risultato dovuto a De Giorgi (la cosiddetta "Stima fondamentale"), che però è ormai divenuto uno strumento standard nello studio dei problemi di rilassamento e Γ-convergenza.

La seconda disuguaglianza si ottiene, invece, in modo semplice e diretto utilizzando la definizione stessa di Γ-convergenza. Infatti, sia $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e $W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \ni u_n \to u$ forte in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Se $u \notin W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$, $\overline{F}^0(u) = +\infty$. Inoltre si avrà necessariamente che $F_{\varepsilon_n}(u_n) \to +\infty$ poiché, in caso contrario, dalle condizioni di crescita (3.6) ne seguirebbe che $\{u_n\}$ è una successione limitata in $W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e, quindi, a meno di sottosuccessioni, convergerebbe ad una funzione di $W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$, contraddicendo l'ipotesi che $u \notin W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Pertanto

$$F^0_{\varepsilon_n}(u_n) \geq F_{\varepsilon_n}(u_n) \to \overline{F}^0(u) \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F^0_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \overline{F}^0(u)\,.$$

Se $u \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$, si ottiene

$$\overline{F}^0(u) = \overline{F}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} F^0_{\varepsilon_n}(u_n) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{F}^0(u) \leq \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F^0_{\varepsilon_n}(u_n)\,.$$

□

Dai risultati esposti, possiamo concludere che dalla successione $\{F_\varepsilon\}$ dei funzionali definiti in (3.3) è possibile estrarre una sottosuccessione $\{F_{\varepsilon_n}\}$ Γ-convergente ad un funzionale limite $\overline{F}$, che si rappresenta ancora in forma integrale, mediante un'opportuna funzione integranda $\varphi(x,\xi)$. Per ottenere la Γ-convergenza di tutta la successione, resta da dimostrare che φ è definita da una formula che non dipende dalla particolare sottosuccessione scelta. Infine, per raggiungere il nostro obiettivo, dovremo anche ottenere che l'integranda φ non dipende da x. A tale scopo stabiliremo quindi delle cosiddette *formule di omogeneizzazione* per l'integranda φ del Teorema 3.7, distinguendo nel seguito i due differenti tipi di funzionali considerati, anche se i risultati sono molto simili.

3.1 Formula di omogeneizzazione: il caso $f(x/\varepsilon, Du)$

Sia ora $M = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e regolare, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, e consideriamo, per ogni $\varepsilon > 0$, il funzionale $F_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du\right) dx \,. \tag{3.10}$$

Allora vale il seguente risultato.

TEOREMA 3.10.

Sia $\{F_\varepsilon\}$ la famiglia di funzionali definiti in (3.10). Assumiamo che l'integranda $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ soddisfi le condizioni (3.4), (3.5) e (3.6). Allora esiste una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, soddisfacente (3.6), tale che, definito $F_{om} : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ come

$$F_{om}(u) = \int_\Omega \varphi(Du)\, dx \,, \tag{3.11}$$

si ha che $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F_{om}$. Inoltre l'integranda φ è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\inf\left\{\int_{(0,1)^N} f\Big(\frac{x}{\varepsilon}, Du+\xi\Big)\, dx \ : \ u \in W_0^{1,p}((0,1)^N)\right\}\right] \\ &= \lim_{T\to+\infty}\left[\inf\left\{\frac{1}{T^N}\int_{(0,T)^N} f(x, Du+\xi)\, dx \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,T)^N\big)\right\}\right] .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Dimostrazione. Diamo un' idea della dimostrazione.

Step 1. Ricordando il teorema di compattezza della Γ-convergenza, si ottiene che, a meno di passare ad una sottosuccessione $\{F_{\varepsilon_n}\}$, esiste un funzionale limite $\overline{F}$ tale che $F_{\varepsilon_n} \to \overline{F}$.

Step 2. Per le proprietà dei Γ-limiti, il funzionale $\overline{F}$ soddisfa le condizioni 1)–5) richiamate nella prima parte della lezione e quindi per esso vale il Teorema 3.7 di rappresentazione integrale. Quindi esiste una funzione di Carathéodory $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convessa nella seconda variabile e soddisfacente le condizioni di crescita (3.6), tale che

$$\overline{F}(u) = \int_\Omega \varphi(x, Du)\, dx \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

In realtà, utilizzando la periodicità di f non è difficile dimostrare che, in questo caso, la funzione φ è indipendente da x.

Step 3. A questo punto, non resta che caratterizzare l'integranda φ come nella formula (3.12), in modo da garantire che la rappresentazione integrale sia indipendente dalla particolare sottosuccessione scelta (vedi [7, Teorema 19], [12] e [16]).

Dalla convessità della funzione φ, che abbiamo detto essere indipendente da x, e dalla disuguaglianza di Jensen, otteniamo che

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \min\{\int_{(0,1)^N} \varphi(Du+\xi)dx \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,1)^N\big)\} \\ &= \min\{\overline{F}(u+\xi\, x) \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,1)^N\big)\}\,,\end{aligned}$$

dove, il funzionale $\overline{F}$ è pensato come un integrale su $\Omega = (0,1)^N$. Utilizzando ora il Teorema 3.5 sulla convergenza dei valori minimi, si ricava

(3.13)

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \min\{\overline{F}(u+\xi\, x) \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,1)^N\big)\} = \lim_{n\to+\infty} \inf\{F_{\varepsilon_n}(u+\xi\, x) \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,1)^N\big)\} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\inf\left\{\int_{(0,1)^N} f\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, Du+\xi\right) dx \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,1)^N\big)\right\}\right].\end{aligned}$$

Ora fissiamo $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $T > 0$ e definiamo

$$M_T(\xi) := \inf\left[\frac{1}{T^N}\left\{\int_{(0,T)^N} f(x, Du+\xi)\, dx \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,T)^N\big)\right\}\right];$$

e sia $u_{\xi,T} \in W_0^{1,p}\big((0,T)^N\big)$ una funzione tale che

$$\frac{1}{T^N}\int_{(0,T)^N} f(x, Du_{\xi,T}+\xi)\, dx \le M_T(\xi) + \frac{1}{T}.$$

Prendiamo ora $S > T+1$ e costruiamo una funzione $u_{\xi,S} \in W_0^{1,p}\big((0,S)^N\big)$ nel modo seguente: consideriamo l'insieme $\mathcal{I} = \{\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_N) \in \mathbb{Z}^N \text{con } 0 \le (T+1)(i_j+1) \le S \text{ per ogni } j = 1,\dots,N\}$, scegliamo $\mathbf{k_i} = (k_{i_1},\dots,k_{i_N}) \in \mathbb{Z}^N$ con $k_{i_j} \in \mathbb{Z} \cap \big[(T+1)i_j, (T+1)i_j+1\big]$, e definiamo

$$u_{\xi,S} = \begin{cases} u_{\xi,T}(x-\mathbf{k_i}) & \text{se } x \in [k_{i_1}, k_{i_1}+T]\times\ldots\times[k_{i_N}, k_{i_N}+T], \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Denotiamo anche con $Q_S = (0,S)^N \setminus \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}}\big([k_{i_1}, k_{i_1}+T]\times\ldots\times[k_{i_N}, k_{i_N}+T]\big)$ ed osserviamo che $|Q_S| \le S^N - T^N\left(\frac{S}{T+1}\right)^N$. Da ciò otteniamo

$$\begin{aligned} M_S(\xi) &\le \frac{1}{S^N}\int_{(0,S)^N} f(x, Du_{\xi,S}+\xi)\, dx \\ &= \frac{1}{S^N}\left[\sum_{i_1,\dots,i_N}\int_{[k_{i_1},k_{i_1}+T]\times\ldots\times[k_{i_N},k_{i_N}+T]} f(x, Du_{\xi,T}(x-\mathbf{k_i})+\xi)\, dx + \int_{Q_S} f(x,\xi)\, dx\right] \\ &\le \frac{1}{S^N}\left[\sum_{i_1,\dots,i_N}\int_{(0,T)^N} f(x+\mathbf{k_i}, Du_{\xi,T}(x)+\xi)\, dx + |Q_S|\Lambda(1+|\xi|^p)\right] \\ &\le \frac{1}{S^N}\left[\sum_{i_1,\dots,i_N}\int_{(0,T)^N} f(x, Du_{\xi,T}(x)+\xi)\, dx + |Q_S|\Lambda(1+|\xi|^p)\right] \\ &\le \frac{T^N}{S^N}\left(\frac{S}{T+1}\right)^N \frac{1}{T^N}\int_{(0,T)^N} f(x, Du_{\xi,T}(x)+\xi)\, dx + \frac{1}{S^N}\left[S^N - T^N\left(\frac{S}{T+1}\right)^N\right]\Lambda(1+|\xi|^p) \\ &\le \left(\frac{T}{T+1}\right)^N\left(M_T(\xi)+\frac{1}{T}\right) + \left[1-\left(\frac{T}{T+1}\right)^N\right]\Lambda(1+|\xi|^p)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la periodicità di f nella prima variabile e le condizioni di crescita standard. Passando al lim sup per $S \to +\infty$ e poi al lim inf per $T \to +\infty$, si ottiene

$$\limsup_{S\to+\infty} M_S(\xi) \le \liminf_{T\to+\infty} M_T(\xi)\,,$$

ovvero è ben definita la funzione

$$M(\xi) := \lim_{T\to+\infty}\left[\inf\left\{\frac{1}{T^N}\int_{(0,T)^N} f(x, Du+\xi)\,dx \ : \ u \in W_0^{1,p}\big((0,T)^N\big)\right\}\right] \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

Facendo il cambiamento di variabile $T = x/\varepsilon_n$, dalla (3.13) si ottiene $M(\xi) = \varphi(\xi)$, che fornisce anche la convessità della funzione $M(\xi)$. D'altra parte, poiché $M(\xi)$ non dipende dalla sotto-successione, dalle proprietà generali della Γ-convergenza si ottiene che tutta la successione $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}$ Γ-converge al medesimo funzionale che, a questo punto, indicheremo con F_{om} e che vale la formula (3.11) unitamente all'uguaglianza (3.12), quindi la tesi è dimostrata. □

Osserviamo che se l'integranda f è convessa nella seconda variabile, allora la funzione che rappresenta il Γ-limite può essere caratterizzata mediante il seguente problema di cella

$$\varphi(\xi) = \inf\left\{\int_{(0,1)^N} f(x, Du+\xi)\,dx \ : \ u \in W_{\#}^{1,p}\big((0,1)^N\big)\right\},$$

dove $W_{\#}^{1,p}\big((0,1)^N\big)$ è lo spazio delle funzioni di $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ periodiche nella cella unitaria $(0,1)^N$.

3.2 Formula di omogeneizzazione: il caso $f(u/\varepsilon, u')$

Sia ora $N = 1$, $\Omega = I = (0,1)$, $u \in W^{1,p}(I;\mathbb{R}^M)$, $1 < p < +\infty$, e consideriamo, per ogni $\varepsilon > 0$, il funzionale $F_\varepsilon : W^{1,p}(I;\mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F_\varepsilon(u) = \int_I f\left(\frac{u}{\varepsilon}, u'\right)\,dx\,. \tag{3.14}$$

TEOREMA 3.11.

Sia $\{F_\varepsilon\}$ la famiglia di funzionali definiti in (3.14). Assumiamo che l'integranda $f : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ soddisfi le condizioni (3.4), (3.5) e (3.6). Allora esiste una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, soddisfacente (3.6), tale che, definito $F_{om} : W^{1,p}(I;\mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$ come

$$F_{om}(u) = \int_I \varphi(u')\,dx\,, \tag{3.15}$$

si ha che $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F_{om}$. Inoltre l'integranda φ è data dalla seguente espressione:

(3.16)

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\inf\{\int_0^1 f(\frac{u}{\varepsilon}, u')\,dx \ : \ u \in W^{1,p}(I;\mathbb{R}^M)\,,\ u(0)=0\,,\ u(1)=\xi\}\right]\\ &= \lim_{T\to+\infty}\left[\inf\{\frac{1}{T}\int_0^T f(u,u')\,dx \ : \ u \in W^{1,p}\big((0,T);\mathbb{R}^M\big)\,,\ u(0)=0\,,\ u(T)=T\xi\}\right].\end{aligned}$$

Dimostrazione. Diamo un' idea della dimostrazione.

Step 1. Ricordando il teorema di compattezza della Γ-convergenza, si ottiene che, a meno di passare ad una sottosuccessione F_{ε_n}, esiste un funzionale limite $\overline{F}$ tale che $F_{\varepsilon_n} \to \overline{F}$.

Step 2. Per le proprietà dei Γ-limiti, il funzionale $\overline{F}$ soddisfa le condizioni 1)–5) richiamate nella prima parte della lezione e quindi per esso vale il Teorema 3.7 di rappresentazione integrale. Quindi esiste una funzione di Carathéodory $\varphi : I \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, convessa nella seconda variabile e soddisfacente le condizioni di crescita (3.6), tale che

$$\overline{F}(u) = \int_I \varphi(x, u')\, dx \qquad \forall u \in W^{1,p}(I; \mathbb{R}^M)\,.$$

In realtà non è difficile dimostrare che, in questo caso, la funzione φ è indipendente da x, grazie alle proprietà di invarianza per traslazioni spaziali dei funzionali F_ε.

Step 3. A questo punto, non resta che caratterizzare l'integranda φ come nella formula (3.16), in modo da garantire che la rappresentazione integrale sia indipendente dalla particolare sottosuccessione scelta. Ci limitiamo qui a ricordare che tale dimostrazione è contenuta nel lavoro di Acerbi-Buttazzo [1]. Una volta dimostrata la (3.16), dalle proprietà generali della Γ-convergenza si ottiene che tutta la successione $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}$ Γ-converge al medesimo funzionale F_{om} e che vale la formula (3.15), quindi la tesi è dimostrata. □

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti trattati in questo capitolo, si rimanda a [9, 11, 14].

CAPITOLO 4

Γ-convergenza: caso $p = 1$. Studio della scacchiera.

Nel caso in cui si considerino funzionali del tipo (3.3), in cui però la funzione integranda soddisfi condizioni di crescita cosiddetta *lenta*, cioè (3.6) con $p = 1$, lo spazio naturale in cui ambientare il problema sembrerebbe essere $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con la convergenza forte $L^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Purtroppo però le cose non funzionano troppo bene in questo caso, poiché, come è noto, in $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ le successioni limitate non ammettono, in generale, delle sottosuccessioni convergenti. Per ovviare a questo inconveniente, in generale, è necessario ambientare il problema in uno spazio più grande, lo spazio $BV(\Omega;\mathbb{R}^M)$ delle funzioni a variazione totale limitata, dove le cose sono molto più complicate. Tuttavia ciò non è necessario nel caso speciale in cui l'integrando sia positivamente 1-omogeneo, poichè, quasi miracolosamente, in questa situazione lo spazio $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è sufficiente per risolvere i problemi che ci interessano. Soffermiamoci, quindi, su questo caso particolare.

4.1 Omogeneizzazione di funzionali a crescita lineare

In questa sezione supporremo $N = 1$ e $\Omega = I = (0,1)$ e considereremo funzionali della forma

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 f\left(\frac{u(x)}{\varepsilon}, u'(x)\right) dx\,, \tag{4.1}$$

dove l'integrando f è una funzione di Carathéodory, che soddisfa le condizioni di crescita standard (3.6) con $p = 1$, cioè

$$\lambda|\xi| \le f(s,\xi) \le \Lambda(1+|\xi|) \qquad \text{per q.o. } s \in \mathbb{R}^M \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^M\,, \tag{4.2}$$

con $0 < \lambda < \Lambda < +\infty$. Assumeremo inoltre che f sia convessa e positivamente omogenea di grado 1 rispetto alla seconda variabile, cioè

$$f(s,\alpha\xi) = \alpha f(s,\xi) \qquad \text{per ogni } (s,\xi) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \text{ e } \alpha > 0. \tag{4.3}$$

Sotto queste ipotesi è stato dimostrato in [6] il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
&G_\varepsilon(v) = \int_0^1 f^p\left(\frac{v(x)}{\varepsilon}, v'(x)\right) dx \xrightarrow{\Gamma} G(v) = \int_0^1 g_{om}(v'(x))\, dx \qquad \forall v \in W^{1,p}(I;R^M)\\
\Longleftrightarrow \quad &F_\varepsilon(u) = \int_0^1 f\left(\frac{u(x)}{\varepsilon}, u'(x)\right) dx \xrightarrow{\Gamma} F(u) = \int_0^1 f_{om}(u'(x))\, dx \qquad \forall u \in W^{1,1}(I;R^M)
\end{aligned}$$

dove $g_{om} = f^p_{om}$ e la Γ-convergenza è intesa rispetto alla convergenza forte di L^p e di L^1, rispettivamente. Il punto essenziale che permette di ottenere questa equivalenza è il fatto che l'ipotesi di positiva omogeneità dell'integrando rende il funzionale invariante per riparametrizzazioni; più precisamente, se $u, v \in W^{1,1}(I;R^M)$ e $v = u \circ \tau$, con τ funzione biiettiva, assolutamente continua e crescente da I in I, allora $F_\varepsilon(u) = F_\varepsilon(v)$. Inoltre, è possibile scegliere opportunamente la riparametrizzazione, in modo tale da poter sostituire ad $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ una funzione Lipschitziana (vedi Osservazione 4.1).

OSSERVAZIONE 4.1. Sia $J=(a,b)$ un intervallo reale e $\{f_\varepsilon\}$ una famiglia di funzioni di Carathéodory soddisfacenti (4.2) e (4.3); sia, inoltre, $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}$ la famiglia dei funzionali associati definiti da

$$\mathcal{F}_\varepsilon(J,u)=\int_a^b f_\varepsilon(u,u')\,dx\,. \tag{4.4}$$

Innanzitutto, osserviamo che, se $u\in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ e $\sigma:J\to J$ è definita da

$$\sigma(x)=a+(b-a)\int_a^x \frac{1+|u'|}{1+\int_a^b|u'|}\,dt\,,$$

allora, $\sigma'>0$ quasi ovunque in J e quindi σ è invertibile. Inoltre, posta $\tau=\sigma^{-1}$ e $v=u\circ\tau$, si ottiene che $v\in W^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M)$ e

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\varepsilon(J,v)&=\int_a^b f_\varepsilon(v(y),v'(y))\,dy=\int_a^b f_\varepsilon(u(\tau(y)),u'(\tau(y)))\frac{1+\int_a^b|u'|\,dt}{(b-a)\,(1+|u'(\tau(y))|)}\,dy\\&=\int_a^b f_\varepsilon(u(x),u'(x))\,dx=\mathcal{F}_\varepsilon(J,u)\,.\end{aligned}\tag{4.5}$$

In realtà, è possibile riparametrizzare un'intera successione limitata in $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$, in modo tale da renderla limitata in $W^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M)$, come si dimostra nel prossimo lemma.

LEMMA 4.2.

Sia $J=(a,b)$ e $u_0\in W^{1,1}(J;R^M)$ e $\{u_h\}\subseteq u_0+W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ una successione equilimitata in $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$. Allora, per ogni $h\in\mathbb{N}$, esiste una funzione biettiva e Lipschitziana $\tau_h:J\to J$ con derivata strettamente positiva q.o. e tale che $\{u_h\circ\tau_h\}$ è una successione di funzioni Lipschitziane equilimitate in $W^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M)$ e appartenenti a $u_0+W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$.

Dimostrazione. Per ogni $h\in\mathbb{N}$ poniamo $L_h=\int_a^b|u_h'|\,dx$, e sia, analogamente a quanto fatto nell'Osservazione 4.1, $\sigma_h:J\to J$ la funzione definita da

$$\sigma_h(x)=a+(b-a)\int_a^x\frac{1+|u_h'|}{1+L_h}\,dt. \tag{4.6}$$

Chiaramente, $\sigma_h(a)=a$, $\sigma_h(b)=b$ and $\sigma_h'>0$ quasi ovunque in J. Poniamo $\tau_h=\sigma_h^{-1}$ e $v_h=u_h\circ\tau_h$; non è difficile verificare che τ_h e v_h sono funzioni Lipschitziane e

$$v_h'(y)=u_h'(\tau_h(y))\frac{1+L_h}{(b-a)(1+|u_h'(\tau_h(y))|)}\qquad\text{per q.o. } y\in J\,. \tag{4.7}$$

Per ipotesi la sucessione $\{L_h\}$ è superiormente limitata, diciamo da una costante C; allora $\{v_h\}$ è una successione di funzioni Lipschitziane le cui costanti di Lipschitz sono limitate da $(1+C)/(b-a)$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Come conseguenza del precedente lemma sulle riparametrizzazioni, otteniamo alcuni interessanti risultati validi in un contesto molto più generale di quello dell'omogeneizzazione periodica. In particolare, il prossimo risultato mostra che l'estremo inferiore dei funzionali $\mathcal{F}_\varepsilon$ fatto su $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$, in realtà, coincide con l'estremo inferiore fatto sulle funzioni Lipschitziane.

PROPOSIZIONE 4.3.

Sia $J=(a,b)$, $u_0\in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ e $\mathcal{F}_\varepsilon:\mathcal{A}(\mathbb{R})\times W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\to[0,+\infty)$ il funzionale definito in (4.4). Allora, per ogni $\varepsilon>0$, si ha

$$\inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(J,u):u\in u_0+W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\}=\inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(J,u):u\in W^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M)\text{ e }u-u_0\in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\}\,.$$

Dimostrazione. Ovviamente

$$
\begin{aligned}
(4.8)\qquad I_\varepsilon :&= \inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(J,u) \ : \ u \in u_0 + W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\} \\
&\le \inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(J,u) \ : \ u \in W^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M) \text{ e } u - u_0 \in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\} =: I_\varepsilon^\infty .
\end{aligned}
$$

Per ogni $h \in \mathbb{N}$, sia $u_h \in u_0 + W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ una funzione tale che

$$\mathcal{F}_\varepsilon(J,u_h) \le I_\varepsilon + \frac{1}{h} .$$

Per le condizioni di crescita (4.2), la successione $\{u_h\}$ è equilimitata in $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$, siano $\tau_h = \sigma_h^{-1}$ e $\sigma_h : J \to J$ definite come in (4.6). Allora, posta $v_h = u_h \circ \tau_h$, si ottiene che $v_h \in W^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M)$ e $v_h - u_0 \in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$; inoltre dalla (4.5) si ottiene $\mathcal{F}_\varepsilon(J,v_h) = \mathcal{F}_\varepsilon(J,u_h)$, ovvero

$$I_\varepsilon^\infty \le \mathcal{F}_\varepsilon(J,v_h) = \mathcal{F}_\varepsilon(J,u_h) \le I_\varepsilon + \frac{1}{h} .$$

Facendo tendere $h \to +\infty$ si ottiene $I_\varepsilon^\infty \le I_\varepsilon$ che, unitamente alla (4.8), conclude la dimostrazione. $\square$

Il seguente risultato (vedi Teorema 3.1 in [6]) è la versione a crescita $p = 1$ del Teorema 3.9.

TEOREMA 4.4.

Sia $\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}\}$ una successione di funzionali del tipo (4.4) dove l'integrando $f_{\varepsilon_n} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to [0,+\infty)$ è una funzione di Carathéodory soddisfacente (4.2) e (4.3). Assumiamo che, per ogni intervallo reale J, la successione $\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}(J,\cdot)\}$ Γ-converga su $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza forte in $L^1(J;\mathbb{R}^M)$ ad un funzionale $\overline{\mathcal{F}}(J,\cdot)$. Sia inoltre $u_0 \in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$. Allora, la successione $\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}(J,\cdot)\}$ Γ-converge a $\mathcal{F}(J,\cdot)$ su $u_0 + W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza forte in $L^1(J;\mathbb{R}^M)$.

Il seguente risultato è, invece, la versione a crescita $p = 1$ della (3.7).

TEOREMA 4.5.

Sia $\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}\}$ una successione di funzionali del tipo (4.4) dove l'integrando $f_{\varepsilon_n} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to [0,+\infty)$ è una funzione di Carathéodory soddisfacente (4.2) e (4.3). Assumiamo che tale successione Γ-converga su $W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ ad un funzionale $\overline{\mathcal{F}}$, dove $J = (a,b)$. Allora

$$(4.9)\qquad \lim_{n\to+\infty} \inf\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}(u) \ : \ u \in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\} = \min\{\overline{\mathcal{F}}(u) \ : \ u \in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\} .$$

Dimostrazione. Sia $\{u_n\} \subset W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ una successione minimizzante, cioè tale che

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_n}(u_n) \le \liminf_{n\to+\infty} [\inf \mathcal{F}_{\varepsilon_n}] .$$

Per le condizioni di crescita (4.2) avremo che la successione $\{u_n\}$ è equilimitata in $W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$. Dall'Osservazione 4.1, possiamo assumere che la successione $\{u_n\}$ sia, in realtà, equilimitata in $W_0^{1,+\infty}(J;\mathbb{R}^M)$; quindi, a meno di sottosuccessioni, $u_n \to u_0 \in W_0^{1,\infty}(J;\mathbb{R}^M)$ forte in $L^1(J;\mathbb{R}^M)$. Quindi, per definizione di Γ-convergenza, otterremo

$$\overline{\mathcal{F}}(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_n}(u_n) \le \liminf_{n\to+\infty} [\inf \mathcal{F}_{\varepsilon_n}] ,$$

ovvero

$$\inf\{\overline{\mathcal{F}}(u)\ :\ u \in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)\} \le \overline{\mathcal{F}}(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty}\,[\inf \mathcal{F}_{\varepsilon_n}]\,. \tag{4.10}$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$, sia $u_j \in W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ tale che $\overline{\mathcal{F}}(u_j) \le \inf \overline{F} + 1/j$; allora, dalla definizione di Γ-convergenza, possiamo costruire una successione $\{u_n^j\} \subseteq W_0^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ tale che $\mathcal{F}_{\varepsilon_n}(u_n^j) \to \overline{\mathcal{F}}(u^j)$. Otteniamo quindi

$$\limsup_{n\to+\infty}[\inf \mathcal{F}_{\varepsilon_n}] \le \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_n}(u_n^j) = \overline{\mathcal{F}}(u^j) \le \inf \overline{\mathcal{F}} + 1/j\,;$$

pertanto, dalla precedente disuguaglianza e dalla (4.10), si ricava

$$\inf \overline{\mathcal{F}} \le \overline{\mathcal{F}}(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty}\,[\inf \mathcal{F}_{\varepsilon_n}] \le \limsup_{n\to+\infty}\,[\inf \mathcal{F}_{\varepsilon_n}] \le \inf \overline{\mathcal{F}} + 1/j\,.$$

Facendo tendere $j \to +\infty$ si ottiene che u_0 è punto di minimo per $\overline{\mathcal{F}}$ e vale (4.9). □

Ricordiamo anche che per il Γ-limite di una famiglia di funzionali del tipo (4.4) vale un risultato di rappresentazione integrale astratta ottenuto in [3, Teorema 6.1].

TEOREMA 4.6.

Sia $J = (a,b)$ un intervallo reale e $\{f_\varepsilon\}$ una famiglia di funzioni di Carathéodory soddisfacenti la (4.2). Sia $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}$ la famiglia dei funzionali associati definiti in (4.4). Assumiamo che esista una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ tale che $\mathcal{F}_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\Gamma} \overline{\mathcal{F}}$. Allora esiste una funzione $\overline{f} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to [0,+\infty)$, misurabile nella prima variabile, continua e convessa nella seconda per quasi ogni $s \in \mathbb{R}^M$, e definita da

$$\overline{f}(s,\xi) = \liminf_{\eta\to 0^+} \frac{1}{\eta} \inf\{\mathcal{F}((0,\eta),u) : u \in W^{1,1}((0,\eta);\mathbb{R}^M),\ u(0)=s,\ u(\eta)=s+\eta\xi\} \tag{4.11}$$

tale che

$$\overline{\mathcal{F}}(u) = \int_a^b \overline{f}(u,u')\ dx \qquad \forall u \in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M).$$

Un analogo risultato di rappresentazione integrale astratta vale anche nel caso di funzionali a crescita $p > 1$ (vedi [4, Teorema 7.1]).

TEOREMA 4.7.

Sia $J = (a,b)$ un intervallo reale e $\{g_\varepsilon\}$ una famiglia di funzioni continue soddisfacenti la (3.6), con $p > 1$, e sia $\{\mathcal{G}_\varepsilon\}$ la famiglia dei funzionali associati definiti da

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u) = \int_a^b g_\varepsilon(u,u')\ dx\,.$$

Assumiamo che esista una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ tale che $\mathcal{G}_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\Gamma} \overline{\mathcal{G}}$. Allora esiste una funzione $\overline{g} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to [0,+\infty)$, misurabile nella prima variabile, continua e convessa nella seconda per quasi ogni $s \in \mathbb{R}^M$, e definita da

$$\overline{g}(s,\xi) = \liminf_{\eta\to 0^+} \frac{1}{\eta} \inf\{\mathcal{G}((0,\eta),u) : u \in W^{1,p}((0,\eta);\mathbb{R}^M),\ u(0)=s,\ u(\eta)=s+\eta\xi\} \tag{4.12}$$

tale che

$$\overline{\mathcal{G}}(u) = \int_a^b \overline{g}(u,u')\ dx \qquad \forall u \in W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M).$$

Alla luce dei precedenti risultati, il seguente teorema ci stabilirà l'equivalenza tra l'omogeneizzazione in $W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M)$, $p>1$, e l'omogeneizzazione in $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ dei funzionali in (4.1). In realtà, esso fornisce un risultato ancora più generale di Γ-convergenza.

TEOREMA 4.8.

Sia $p>1$ e per ogni $\varepsilon>0$ sia $f_\varepsilon:\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M\to[0,+\infty)$ una funzione di Carathéodory, che soddisfi le condizioni di crescita (4.2) e che sia convessa e positivamente omogenea di grado 1 rispetto alla seconda variabile. Per ogni $J\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$, $u\in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ e $v\in W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M)$ definiamo $\mathcal{F}_\varepsilon(J,u)$ come in (4.4) e

$$\mathcal{G}_\varepsilon(J,v)=\int_J\left[f_\varepsilon(v(x),v'(x))\right]^p\,dx.$$

Allora, per ogni $J\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$, la successione $\{\mathcal{F}_\varepsilon(J,\cdot)\}$ Γ-converge in $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza forte di $L^1(J;\mathbb{R}^M)$ se e solo se, per ogni $J\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$, la successione $\{\mathcal{G}_\varepsilon(J,\cdot)\}$ Γ-converge in $W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza forte di $L^p(J;\mathbb{R}^M)$. Inoltre, se $\overline{\mathcal{F}}(J,\cdot)$ e $\overline{\mathcal{G}}(J,\cdot)$ sono i rispettivi Γ-limiti, allora esiste una funzione misurabile $\overline{f}:\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M\to[0,+\infty)$ tale che

$$\overline{\mathcal{F}}(J,u)=\int_J\overline{f}(u,u')\,dx\qquad\text{e}\qquad\overline{\mathcal{G}}(J,v)=\int_J\left(\overline{f}(v,v')\right)^p\,dx$$

per ogni $u\in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ e per ogni $v\in W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M)$.

Dimostrazione. Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione infinitesima tale che, per ogni $J\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$ le successioni $\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}(J,\cdot)\}$ e $\{\mathcal{G}_{\varepsilon_n}(J,\cdot)\}$ Γ-convergano rispettivamente in $W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza forte di $L^1(J;\mathbb{R}^M)$ e in $W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M)$ rispetto alla convergenza forte di $L^p(J;\mathbb{R}^M)$. Siano, inoltre, $\overline{\mathcal{F}}(J,\cdot)$ e $\overline{\mathcal{G}}(J,\cdot)$ i rispettivi Γ-limiti. Allora, dai Teoremi 4.6 e 4.7 si ottiene che esistono due funzioni misurabili $\overline{f},\overline{g}:\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M\to[0,+\infty)$ date dalla (4.11) e dalla (4.12), tali che

$$\overline{\mathcal{F}}(J,u)=\int_J\overline{f}(u,u')\,dx\qquad\text{e}\qquad\overline{\mathcal{G}}(J,v)=\int_J\overline{g}(v,v')\,dx$$

per ogni $J\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$, per ogni $u\in W^{1,1}(J;\mathbb{R}^M)$ e per ogni $v\in W^{1,p}(J;\mathbb{R}^M)$. Resta, quindi, da dimostrare che $\overline{g}=\overline{f}^p$. A tale scopo, fissiamo $(s,\xi)\in\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M$ e $\eta>0$ e definiamo

$$I_n=\inf\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}((0,\eta),u):u\in W^{1,1}((0,\eta);\mathbb{R}^M),\ u(0)=s,\ u(\eta)=s+\eta\xi\}\tag{4.13}$$

$$J_n=\inf\{\mathcal{G}_{\varepsilon_n}((0,\eta),v):v\in W^{1,p}((0,\eta);\mathbb{R}^M),\ v(0)=s,\ v(\eta)=s+\eta\xi\}\,.\tag{4.14}$$

Vogliamo mostrare che

$$J_n=\eta^{1-p}(I_n)^p\tag{4.15}$$

A questo scopo, sia v una funzione amissibile per il problema (4.14). Dalla disugualgianza di Jensen si ricava

$$\mathcal{G}_{\varepsilon_n}((0,\eta),v)=\int_0^\eta\left(f_{\varepsilon_n}(v,v')\right)^p\,dx\geq\eta^{1-p}\Big(\int_0^\eta f_{\varepsilon_n}(v,v')\,dx\Big)^p\geq\eta^{1-p}(I_n)^p\,.$$

Mostriamo ora che questo limite inferiore per $\mathcal{G}_{\varepsilon_n}$ è in realtà l'estremo inferiore J_n. Infatti, per ogni $\delta > 0$ sia u_δ una funzione ammissibile per il problema (4.13) tale che $\mathcal{F}_{\varepsilon_n}((0,\eta), u_\delta) \leq I_n + \delta$. Consideriamo la funzione $\sigma_\delta \colon [0,\eta] \to [0,\eta]$ definita da

$$\sigma_\delta(x) = \gamma_\delta^{-1} \int_0^x (f_{\varepsilon_h}(u_\delta, u'_\delta) + \delta)\ dy\,,$$

dove $\gamma_\delta = \frac{1}{\eta}\int_0^\eta (f_{\varepsilon_h}(u_\delta, u'_\delta) + \delta)\ dx$. Osserviamo che σ_δ è una funzione assolutamente continua con derivata strettamente positiva q.o. e tale che $\sigma_\delta(0) = 0$, $\sigma_\delta(\eta) = \eta$; perciò la sua funzione inversa τ_δ è anch'essa una funzione assolutamente continua da $[0,\eta]$ su $[0,\eta]$ con derivata strettamente positiva q.o.; inoltre, $v_\delta = u_\delta \circ \tau_\delta$ è ancora una funzione assolutamente continua. Dalle condizioni di crescita per f_{ε_n} segue che v'_δ è limitata; in particolare, $v_\delta \in W^{1,p}((0,\eta);\mathbb{R}^M)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\eta (f_{\varepsilon_n}(v_\delta, v'_\delta))^p\ dx &= \gamma_\delta^p \int_0^\eta \big(f_{\varepsilon_n}(u_\delta(\tau_\delta(sx)), u'_\delta(\tau_\delta(x))\big)^p \big(f_{\varepsilon_n}(u_\delta(\tau_\delta(sx)), u'_\delta(\tau_\delta(x)) + \delta\big)^{-p}\ dx \\ &\leq \eta\gamma_\delta^p \leq \eta\big(\frac{1}{\eta}(I_n + \delta) + \delta\big)^p\,.\end{aligned}$$

Facendo tendere δ a 0, l'ultimo termine tende a $\eta^{1-p}(I_n)^p$, quindi $J_n \leq \eta^{1-p}(I_n)^p$. Ciò dimostra la (4.15).

Dal Teorema 4.4 si ottiene la Γ-convergenza di $\{\mathcal{F}_{\varepsilon_n}((0,\eta),\cdot)\}$ nello spazio $\{u \in W^{1,1}((0,\eta);\mathbb{R}^M)\colon u(0) = s,\ u(\eta) = s + \eta\xi\}$. A sua volta, dal Teorema 4.5 si ottiene

$$\inf\{\overline{\mathcal{F}}((0,\eta),u) : u \in W^{1,1}((0,\eta);\mathbb{R}^M),\ u(0) = s,\ u(\eta) = s + \eta\xi\} = \lim_{n\to+\infty} I_n$$

Il medesimo risultato per la successione $\{\mathcal{G}_{\varepsilon_n}((0,\eta),\cdot)\}$ può essere ottenuto con tecniche analoghe: vedi Teoremi 21.1 e 7.8 in [14] (che sono una generalizzazione dei Teoremi 3.9 e 3.5). Pertanto,

$$\inf\{\overline{\mathcal{G}}((0,\eta),v) : v \in W^{1,p}((0,\eta);\mathbb{R}^M),\ v(0) = s,\ v(\eta) = s + \eta\xi\} = \lim_{n\to+\infty} J_n\,.$$

Quindi, tenendo conto di (4.15), si ottiene

$$\overline{g}(s,\xi) = \liminf_{\eta\to 0^+} \frac{1}{\eta} \lim_{n\to+\infty} \eta^{1-p}(I_n)^p = \big(\liminf_{\eta\to 0^+} \frac{1}{\eta} \lim_{n\to+\infty} I_n\big)^p = (\overline{f}(s,\xi))^p\,.$$

La dimostrazione si conclude utilizzando i teoremi di compattezza della Γ-convergenza (Proposizione 2.2 in [4] e Teorema 19.6 in [14]) per le successioni $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}$ e $\{\mathcal{G}_\varepsilon\}$, pensate come successioni di funzionali definiti sul prodotto cartesiano $\mathcal{A}(\mathbb{R}) \times W^{1,p}$, con $p = 1$ e $p > 1$, rispettivamente, e la proprietà di Urysohn (vedi [14], Proposizione 8.3) che è soddisfatta dalla Γ-convergenza. □

4.2 Il problema della scacchiera

In questa sezione vogliamo applicare il risultato stabilito nel Teorema 4.8 al caso di un particolare funzionale, che descrive l'energia di un raggio luminoso in un mezzo piano, nell'ipotesi dell'ottica geometrica ed in assenza di riflessione. A questo scopo, fissiamo le proprietà ottiche del materiale composito in termini dei suoi indici di rifrazione: fissato $\beta > 1$, definiamo su $[0,2) \times [0,2)$ la funzione

$$a_\beta(x,y) = \begin{cases} \beta, & \text{if } (x,y) \in [(0,1) \times (1,2)] \cup [(1,2) \times (0,1)], \\ 1, & \text{altrimenti}, \end{cases} \tag{4.16}$$

ed estendiamola per periodicità su tutto $\mathbb{R}^2$, denotandola ancora come a_β. Pertanto, se supponiamo normalizzata ad 1 la velocità della luce nel vuoto, stiamo affermando che il raggio luminoso attraversa il materiale in questione con velocità $1/a_\beta$. Per semplicità, chiameremo *quadratini bianchi* quelli con indice di rifrazione 1 e *quadratini neri* quelli con indice di rifrazione β.

Osserviamo che all'interno delle zone omogenee di materiale e sulle interfaccie di separazione valgono il Principio di Fermat e la legge di rifrazione di Snell, che descrivono completamente il cammino del raggio luminoso. Nel nostro caso a scacchiera, però, la situazione è più complicata a causa della presenza degli spigoli, dove non è prescritta alcuna condizione necessaria. Tuttavia, il cammino del raggio luminoso sarà descritto dalla soluzione di minimo del funzionale energia associato ad a_β e, poiché in realtà la descrizione proposta è relativa alla scala microscopica ε del mezzo disomogeneo, avremo che l'indice di rifrazione effettivamente osservato a questa scala sarà $a^\varepsilon_\beta(x,y) = a_\beta(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$ ed il corrispondente funzionale dell'energia sarà

$$\mathcal{L}^\varepsilon_\beta(u) = \int_0^1 a^\varepsilon_\beta(u(t))\,|u'(t)|\;dt\,. \tag{4.17}$$

In particolare, poi, noi saremo interessati a descrivere il comportamento del raggio luminoso dal punto di vista macroscopico e, quindi, a studiare il comportamento delle geodetiche quando $\varepsilon \to 0$. In [1] è stato dimostrato che, per ogni $\beta > 1$, il funzionale

$$\mathcal{G}^\varepsilon_\beta(u) = \int_0^1 a^2_\beta\,(u/\varepsilon)\;|u'|^2\;dt\,, \tag{4.18}$$

Γ-converge, per $\varepsilon \to 0$, ad un funzionale della forma

$$\mathcal{G}^{hom}_\beta(u) = \int_0^1 g_\beta(u'(t))\;dt\,,$$

dove l'integranda $g_\beta : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ è stata esplicitamente calcolata per $\beta \geq 4$ ed è data da

$$g_\beta(x,y) = [(\sqrt{2}-1)\min\{|x|,|y|\} + \max\{|x|,|y|\}]^2\,, \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Come conseguenza del Teorema 4.8 si ricava, quindi, che la successione $\{\mathcal{L}^\varepsilon_\beta\}$, per ogni $\beta > 1$, Γ-converge ad un funzionale della forma

$$\mathcal{L}^{hom}_\beta(u) = \int_0^1 \Phi_\beta(u'(t))\;dt\,,$$

dove l'integranda $\Phi_\beta = \sqrt{g_\beta}$. Pertanto, per $\beta \geq 2$, si avrà

$$\Phi_\beta(x,y) = (\sqrt{2}-1)\min\{|x|,|y|\} + \max\{|x|,|y|\}\,, \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{4.19}$$

In realtà, non è difficile dimostrare che, per tutti i $\beta \geq \sqrt{2}$, si ottiene la medesima integranda. Osserviamo che tale integranda non dipende in alcun modo dall'indice di rifrazione β dei quadratini neri. Ciò è dovuto al fatto che, a livello microscopico, si riescono a caratterizzare le geodetiche fra due vertici qualsiasi come spezzate ottimali che non attraversano mai i quadratini neri. Infatti, dal Teorema di Pitagora segue che, per tali valori di β, la lunghezza della diagonale che connette due vertici opposti di un quadratino nero, pesata sull'indice di rifrazione, è sempre non inferiore alla lunghezza del cammino fatto lungo i due lati di connessione.

Una volta nota la funzione Φ_β che descrive l'energia macroscopica del raggio luminoso, sono automaticamente noti i fronti d'onda che, supponendo di aver posto la sorgente luminosa nell'origine degli assi, risultano essere degli ottagoni regolare centrati nell'origine, con i vertici sugli assi cartesiani e sulle due bisettrici.

Solo recentemente ci si è interessati a studiare questo fenomeno per i valori dell'indice di rifrazione $\beta < \sqrt{2}$ (vedi [5]), per cercare di capire come si modificano i fronti d'onda, quando l'indice di rifrazione β scende al di sotto di questa soglia e si avvicina ad 1, valore per cui ovviamente i fronti d'onda saranno delle circonferenze centrate nell'origine. I risultati ottenuti in questo ambito sono elencati di seguito:

1. esiste una soglia critica $\beta_c \in (\sqrt{3/2}, \sqrt{2})$ (esattamente $\beta_c \sim 1,2408$, calcolabile numericamente come soluzione di un opportuno sistema di equazioni) tale che per $\beta > \beta_c$ il funzionale Γ-limite continua ad essere descritto dall'integranda Φ_β in (4.19), poiché le geodetiche che connettono a livello microscopico due vertici qualsiasi sono delle spezzate che non attraversano mai i quadratini neri (e che chiameremo *cammini bianchi*);
2. per $\beta = \beta_c$, accanto ai cammini bianchi, compaiono delle nuove geodetiche costituite da cammini bianchi connessi con *moduli a* 3 *quadretti*, cioè cammini che connettono il vertice di un quadratino bianco con il vertice opposto del successivo quadratino bianco, seguendo la legge di Snell (i cosiddetti *cammini ottici*); in particolare, β_c è ottenuto esattamente come il valore per cui il cammino ottico che connette l'origine con il punto $(3,1)$ ha lunghezza $2+\sqrt{2}$, cioè pari a quella del corrispondente cammino ottimale bianco che connette i due punti;
3. per $\sqrt{\frac{3}{2}} < \beta < \beta_c$, si riescono ancora a caratterizzare esplicitamente le geodetiche, ma l'integranda Φ_β non è più data dalla (4.19), bensì presenta come fronti d'onda dei poligoni a sedici lati, non regolari, sempre centrati nell'origine. I nuovi vertici che appaiono in questi poligoni a 16 lati non toccano la circonferenza corrispondente circoscritta al vecchio ottagono. In questo range di rifrazione, le geodetiche si costruiscono concatenando il numero massimo di traslazioni dei cammini ottici congiungenti l'origine con il punto $(3,1)$, riscalati alla scala ε, con segmenti orizzontali o con segmenti che giacciono sulle diagonali dei quadratini bianchi;
4. per $1 < \beta \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ la caratterizzazione delle geodetiche sembra, invece, estremamente più delicata, ed allo stato attuale l'unica informazione certa è che i fronti d'onda presentano sempre degli spigoli (almeno in prossimità degli assi cartesiani) e non delimitano mai una regione strettamente convessa.

N.B. I risultati ottenuti in [5] per il problema della scacchiera sono stati proposti agli studenti mediante una presentazione pdf.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo: *On the limits of periodic Riemannian metrics.* J. Analyse Math., vol. 43, (1983), pp. 183–201.

[2] R. Adams: Sobolev spaces. *Academic Press, New York, (1975).*

[3] M. Amar: *Integral representation of functionals defined on curves of* $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$. Bollettino U.M.I., vol. (7) 10-B, (1996), pp. 359–380.

[4] M. Amar, G. Bellettini, S. Venturini: *Integral representation of functionals defined on curves of* $W^{1,p}$. Proc. Roy. Soc. Edin., vol. 128A, (1998), pp. 193–217.

[5] M. Amar, G. Crasta, A. Malusa: *On the Finsler metrics obtained as limits of chessboarad structures.* Adv. Calc. Var., vol. 2, (2009), pp. 321–360.

[6] M. Amar, E. Vitali: *Homogenization of periodic Finsler metrics.* J. Convex Anal., vol. 5, (1998), pp. 171–186.

[7] A. Braides: *Omogeneizzazione di integrali non coercivi.* Ric. Mat., vol. 32, (1983), pp. 347–368.

[8] A. Braides: Γ-convergence for beginners. *Oxford University Press, New York, (2002).*

[9] H. Brezis: Analyse fonctionelle. *Masson, Paris, (1983).*

[10] G. Buttazzo, G. Dal Maso: *Integral representation and relaxation of local functionals.* Nonlinear Anlysis, Theory, Methods & Applications, vol. 9(6), (1985), pp. 515–532.

[11] G. Buttazzo: Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations. *Pitman, Longman, Harlow, (1989).*

[12] L. Carbone, C. Sbordone: *Some properties of* Γ*-limits of integral functionals.* Ann. Mat. Pura Appl., vol. 122(4), (1979), pp. 1–60.

[13] B. Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations. *Springer, Berlin, (1982).*

[14] G. Dal Maso: An introduction to Γ-convergence. *Birkhäuser, Boston, (1993).*

[15] I. Ekeland, R. Temam: Analyse convexe et problèmes variationnels. *Dunod, Paris, (1974) (Traduzione inglese: North-Holland (1976)).*

[16] P. Marcellini: *Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems.* Ann. Mat. Pura e Appl., vol. 117, (1978), pp. 139–152.

[17] R.T. Rockafellar: Convex Analysis. *Princeton University Press, (1970).*