

Micol AMAR
Dipartimento Me.Mo.Mat.
Università "La Sapienza" - Roma
Via A. Scarpa 10 - 00161 Roma
amar@dmmm.uniroma1.it

SEMICONTINUITÀ E RILASSAMENTO

Questo quaderno raccoglie gli appunti utilizzati per le lezioni di un corso di 20/25 ore, svoltosi nell'a.a. 2003/2004, nell'ambito del Dottorato di Modelli e Metodi Matematici per la Tecnologia e la Società, presso il Dipartimento Me.Mo.Mat. della Facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza" di Roma.

L'argomento trattato costituisce un primo approccio allo studio dei problemi di minimo per funzionali integrali tramite i Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni. Questi metodi sono stati sviluppati in tempi relativamente recenti, cioè a partire dall'inizio del XX secolo, da Hilbert e Lebesgue, in connessione con lo studio dell'integrale di Dirichlet, e sono stati poi generalizzati da Tonelli. L'approccio con i Metodi Diretti si basa sostanzialmente sul classico Teorema di Weierstrass. Si tratta, cioè, di trovare delle successioni minimizzanti compatte (dalle quali sia quindi possibile estrarre sottosuccessioni convergenti) e sfruttare poi la continuità (o meglio la s.c.i.) del funzionale per ottenere che i punti limite sono in realtà punti di minimo per il funzionale considerato.

Il quaderno è suddiviso in tre capitoli. Nel primo capitolo, vengono richiamate, molto sommariamente, alcune nozioni di analisi funzionale (spazi di Sobolev, convergenza debole, teoremi di immersione) preliminari ed indispensabili alla comprensione del corso stesso. Nel secondo capitolo vengono introdotti ed analizzati i principali temi dell'analisi convessa (definizioni e proprietà delle funzioni semicontinue inferiormente e convesse, trasformata di Legendre o funzione polare, sottodifferenziale, differenziabilità secondo Gâteaux e Fréchet). Infine nell'ultimo capitolo si introducono i Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni per lo studio dei problemi di minimo (definizione di coercività, teorema di esistenza di un punto di minimo, applicazioni ai funzionali integrali, rilassamento).

Settembre 2004