LA RICERCA DI ESEMPI
IN GEOMETRIA QUATERNIONALE E LE RIDUZIONI

PAOLO PICCINNI

SUNTO. Il quaderno presenta una breve rassegna storica dell'uso dei quaternioni in geometria fin dalle origini nel lavoro di Hamilton, ma con enfasi su alcuni sviluppi degli ultimi vent'anni in geometria riemanniana. Vari esempi significativi, determinati a più riprese, hanno contribuito a porre l'accento sulle due classi delle varietà iperkähleriane e quaternionali kaehleriane e sulle loro interazioni con la geometria algebrica complessa. Si illustra in particolare la tecnica delle riduzioni, che ha origine in geometria simplettica e che si applica con grande successo in vari contesti della geometria quaternionale. Si discutono in particolare alcune di queste riduzioni in geometria iperkähleriana e quaternionale kähleriana positiva e negativa, la loro applicazione alla costruzione di vecchi e nuovi esempi e a qualche argomento di ricerca attuale.

1. GLI INIZI

"...Tomorrow will be the fifteenth birthday of the Quaternions. They started into life, or light, full grown, on the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. This is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed, and the sparks which fell from it were the fundamental equations between i, j, k *exactly such* as I have used them ever since. I pulled out, on the spot, a pocketbook, which still exists, and made an entry, on which, *at the very moment*, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come..."

William Rowan Hamilton (1805-1865) descrive con queste parole la scoperta dei quaternioni (*North British Rev.* **14**, 1858). Per molti anni prima del 1843 Hamilton aveva cercato una moltiplizione e divisione tra terne e poi tra quaterne di numeri reali, e una difficoltà fu certamente accettare la non commutatività del prodotto e la conseguente necessità di distinguere tra divisione a sinistra e a destra.

Il nome di Hamilton è oggi legato a principi, nozioni ed equazioni fondamentali della meccanica e della geometria simplettica e può apparire sorprendente che Hamilton considerasse la scoperta dei quaternioni come il suo più alto contributo alla scienza, al punto di considerarli "la chiave di lettura dell'universo" e di dedicare ad essi quasi tutta la sua attività successiva (cfr. la recente raccolta elettronica delle sue opere in [12]). Le ricerche di Hamilton sui quaternioni sono in buona parte raccolte nei due ampi trattati [13], [14], dove vari capitoli della geometria e dell'astronomia vengono presentati alla luce della nuova scoperta. La biografia di Hamilton riporta anche che egli arrivò nel suo entusiasmo a paragonare la scoperta dei quaternioni a quella del calcolo infinitesimale (cfr. [18], p. 911).

Naturalmente questa immensa fiducia nelle possibilità applicative dei quaternioni non incontrò il favore della storia. Tuttavia, negli ultimi decenni del ventesimo secolo la fortuna dei quaternioni sembra aver incontrato un nuovo stadio, e anche se sarebbe troppo affermare che le previsioni di Hamilton si siano avverate in anni recenti, è certo che un forte sviluppo dei quaternioni ha avuto luogo precisamente nei due campi che Hamilton aveva previsto, la geometria e la fisica (cfr. gli atti dei recenti convegni [28], [29]).

Dunque l'usuale notazione

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,\ q_\alpha \in \mathbb{R}\},$$

dell'algebra dei quaternioni onora Hamilton, e le equazioni fondamentali da lui scoperte nel 1843 sono:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,$$

esprimibili anche nella seguente più sintetica forma:

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.}$$

Ne segue la regola di non commutatività di $\mathbb{H}$, in termini del *coniugio* $\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ di quaternioni: per ogni $q, h \in \mathbb{H}$, risulta:

$$\overline{qh} = \overline{h}\,\overline{q}.$$

Una delle prime applicazioni geometriche di $\mathbb{H}$ nel diciannovesimo secolo è la descrizione delle rotationi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$, ottenute rispettivamente da W. Hamilton (1844) e da A. Cayley (1855). Denotando con

$$Sp(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{H}), \bar{A}^t A = I\}$$

il *gruppo quaternionale unitario*, e osservato che $Sp(1) \cong S^3 =$ gruppo dei quaternioni di modulo 1, esse si possono essere compendiare nei rivestimenti doppi:

$$\boxed{Sp(1) \cong S^3 \cong Spin(3) \to SO(3),}$$

$$\boxed{Sp(1) \times Sp(1) \cong Spin(4) \to SO(4),}$$

dove la prima proiezione $q \in Sp(1) \to A \in SO(3)$ è definita su vettori $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \cong \mathrm{im}\, \mathbb{H}$ dalla formula $A\vec{x} = \bar{q}\vec{x}q$, e la seconda proiezione $(q, q') \in Sp(1) \times Sp(1) \to A \in SO(4)$ per $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ da $A\vec{x} = q'\vec{x}q$.

È interessante notare che in queste due applicazioni elementari di $\mathbb{H}$ appaiono per $n = 1$ i due gruppi

$$Sp(n), \qquad Sp(n) \cdot Sp(1) = \frac{Sp(n) \times Sp(1)}{\mathbb{Z}_2}$$

(il secondo isomorfo a $SO(4)$ per $n = 1$), assai più tardi utilizzati per definire le due significative olonomie *iperkähleriana* and *quaternionale kähleriana.*

Anche le rotazioni di $\mathbb{R}^5$ ammettono una descrizione quaternionale, ancora esprimibile con un rivestimento doppio:

$$\boxed{Sp(2) \cong Spin(5) \to SO(5).}$$

Il modo più semplice di riconoscere quest'ultima è attraverso le seguenti presentazioni della 4-sfera come spazio omogeneo diffeomorfo alla retta proiettiva quaternionale:

$$\frac{Sp(2)}{Sp(1) \times Sp(1)} \cong \mathbb{H}P^1 \cong S^4 \cong \frac{SO(5)}{SO(4)}.$$

Si ricordi a questo riguardo che, a norma di un classico teorema di Borel e Serre, solo le sfere S^2 e S^6 possono ammettere una struttura quasi complessa. L'isomorfismo $Sp(1) \cdot Sp(1) \cong SO(4)$ sarà utilizzato per definire tuttavia un'opportuna struttura "quaternionale" su S^4 che globalizza la presenza di strutture quasi complesse I, J, K con $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ definite solo localmente (cfr. par. 3).

Questo scritto ha avuto origine da un seminario tenuto presso le Università della Basilicata, dell'Aquila, e di Roma "La Sapienza". Desidero ringraziare Sorin Dragomir, Emilio Musso e Manlio Bordoni per l'invito e il Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici di Roma per aver realizzato questo preprint. Esso include anche qualche mio specifico interesse, e naturalmente riflette il modo in cui ho avuto modo di vivere lo sviluppo della geometria quaternionale, un interesse ben presente a Roma da molto tempo. Eccellenti e assai più complete rassegne di recenti sviluppi della geometria quaternionale possono trovarsi in diversi articoli del volume *Essays on Eintein Manifolds* [10].

2. Analisi quaternionale

Nessuna delle due definizioni fondamentali di funzione regolari di variabile complessa ha interessanti conseguenze quando applicate a funzioni quaternionali $f : q :\in \mathbb{H} \to h \in \mathbb{H}$. E' infatti facile vedere che le $h = f(q)$ olomorfe in senso quaternionale sono necessariamente lineari ($h = qa + b$, se si richiede l'olomorfia a sinistra). D'altra parte un semplice calcolo mostra che le funzioni $h = f(q)$ rappresentabili in serie di potenze quaternionali sono tutte le serie di potenze di quattro variabili reali. In altre parole, la definizione di funzione quaternionale olomorfa è troppo restrittiva e quella di funzione analitica quaternionale non abbastanza restrittiva per costruire una teoria significativa.

Un approccio diverso all' *Analisi quaternionale* fu sviluppato da R. Fueter a partire dal 1936, definendo *funzione regolare di variabile quaternionale* ogni

$$f : q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H} \to h \in \mathbb{H}$$

che soddisfi le condizioni "di Cauchy-Riemann":

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial q_0} + \frac{\partial f}{\partial q_1} i + \frac{\partial f}{\partial q_2} j + \frac{\partial f}{\partial q_3} k = 0.}$$

Se Dq è la 3-forma in $\mathbb{H}$ trasformata di dq mediante lo "star" di Hodge, questa condizione è equivalente alla chiusura della 3-forma fDq, e si può dunque usare il teorema di Stokes. Ne seguono teorema e formula integrale di Cauchy, sviluppo in serie di Laurent per funzioni $h = f(q)$, formule di Bochner-Martinelli per funzioni di più variabili quaternionali.

Esistono moltissime funzioni regolari (si costruiscono a partire da una $f_0 : q \in \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ armonica, o da una $g : z \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa). Tuttavia le funzioni potenza $h = q^n$ non sono regolari (neanche nel caso $n = 1$; la funzione identica non rientra dunque nell'analisi quaternionale!).

Oggi l'approccio di Fueter sembra essere l'unico sviluppato. La sua adattabilità a formule di rappresentazione integrale sono la ragione storica dell'interesse iniziale di E. Martinelli per $\mathbb{H}$.

Questo interesse, ampliato poi alla *Geometria quaternionale*, è stato trasmesso ad alcuni suoi allievi e condiviso da vari altri italiani. Tra essi vorrei menzionare F. Battaglia, M. Bruni, A. Fino, G. Gentili, S.

Marchiafava, E. Musso, K. O' Grady, D. Pertici, F. Podestà, M. Pontecorvo, G.B. Rizza, G. Romani, D. Struppa, F. Tricerri, L. Verdiani,...

Una rassegna degli principali aspetti dell'Analisi quaternionale si trova in [33]. Sviluppi applicativi dell'Analisi quaternionale potrebbero scaturire dalla recente proposta di D. Joyce (cfr. il suo contributo in [29]) di considerare le funzioni regolari di variabile quaternionale su varietà ipercomplesse, e di utilizzarle come approccio ad una *Geometria algebrica quaternionale*.

3. Ricerca di classi di varietà "quaternionali"

L'approccio a una *Geometria quaternionale* non è dunque ovvio. Varietà con coordinate quaternionali locali tali che le jacobiane dei cambiamenti di coordinate siano in $GL(n, \mathbb{H})$ sono in modo naturale i primi candidati da considerare in una geometria quaternionale. Tuttavia, la discussione nel precedente paragrafo mostra che tali varietà sono *localmente affini*, ovvero con cambiamenti lineari tra coordinate locali. Uno studio sistematico di tali varietà è oggetto di un lavoro di A. Sommese, 1975. Per $n = 1$ le sole M^{4n} compatte con tale struttura integrabile risultano essere i tori e alcune superfici di Hopf (Ma. Kato, 1980).

D'altra parte, se si rinuncia all'ipotesi di integrabilità, la richiesta di avere una struttura $GL(n, \mathbb{H})$ sul fibrato tangente è del tutto naturale, e può essere espressa nel seguente modo.

Definizione 3.1. Una *struttura quasi ipercomplessa* su una varietà M^{4n} è una terna ordinata $H = (I_1, I_2, I_3)$ di strutture quasi complesse che soddisfino le identità quaternionali $I_\alpha \circ I_\beta = I_\gamma$ per $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$ e permutazioni cicliche. Se le strutture I_1, I_2, I_3 sono integrabili, H si dice *struttura ipercomplessa*.

Si noti che qui la condizione di integrabilità corrisponde all'esistenza di una connessione a torsione nulla che conservi le strutture quasi complesse appartenenti ad H, e questa è una condizione più debole che richiedere l'integrabilità della struttura $GL(n, \mathbb{H})$. Se $H = (I_1, I_2, I_3)$ è una struttura ipercomplessa, ogni terna (J_1, J_2, J_3) che sia ottenibile da (I_1, I_2, I_3) moltiplicando per una matrice di $SO(3)$ è ancora una struttura ipercomplessa. Vi è inoltre un insieme di *strutture complesse compatibili* $J = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3$, dove a_1, a_2, a_3 sono funzioni che soddisfano $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

Altre classi di varietà di interesse in geometria quaternionale discendono dalla seguente definizione.

Definizione 3.2. Una *struttura quasi quaternionale* su M^{4n} è un sottofibrato Q di rango 3 del fibrato $\mathrm{End}(TM)$ degli endomorfismi del fibrato tangente, localmente generat da strutture quasi ipercomplesse $H = (I_1, I_2, I_3)$ che siano legate da matrici di $SO(3)$ sull' intersezione di aperti di banalizzazione. Una *struttura quaternionale* sulla varietà M^{4n} è una struttura quasi quaternionale tale che esiste una connessione ∇ su TM a torsione nulla, che quando estesa a $\mathrm{End}(TM)$ conservi Q, ovvero $\nabla Q \subseteq Q$.

Notiamo nuovamente che l'esistenza di una connessione ∇ che sia compatibile con Q e a torsione nulla non è equivalente all' integrabilità della G-struttura individuata da Q, essendo ora

$$G = GL(n, \mathbb{H}) \cdot Sp(1) = \frac{GL(n, \mathbb{H}) \times Sp(1)}{\mathbb{Z}_2}.$$

Se una struttura quasi quaternionale Q è assegnata su M^{4n}, le basi locali (I_1, I_2, I_3) di sezioni di Q si dicono *strutture locali quasi ipercomplesse compatibili*, e ogni $J = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3$ locale con $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ è una *struttura locale quasi complessa compatibile.*

Una metrica riemanniana g sulla variet'a ipercomplessa (M, H) si dice *iperhermitiana*, rispettivamente *iperkähleriana*, se è hermitiana, rispettivamente kähleriana, rispetto a I_1, I_2, I_3. Similmente, su una varietà quaternionale (M, Q), g si dice *quaternionale hermitiana* se è hermitiana rispetto alle basi locali (I_α) di Q, e *quaternionale kähleriana* se inoltre Q è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita. Se M è solo quasi ipecomplessa o quasi quaternionale, una metrica quasi iperhermitiana o quasi quaternionale hermitiana è definita in modo simile.

Lo *spazio dei twistors* Z, definito per ogni varietà quasi quaternionale (M, Q), è la varietà delle strutture quasi complesse compatibili sugli spazi tangenti di M. Dunque Z è il fibrato in sfere S^2 associato al fibrato vettoriale Q, rispetto a una metrica che renda ortonormali le basi locali $H = (I_1, I_2, I_3)$ [4], [30].

L' origine delle varietà iperkähleriane e quaternionali kähleriane si può far risalire al seguente ben noto:

Teorema 3.1. (M. Berger, 1955) [4] *Le possibili rappresentazioni di olononomia di varietà riemanniane semplicemente connesse irriducibili e non simmetriche sono date dalla seguente lista:*

$$SO(n), \quad U(n), SU(n), \quad Sp(n), Sp(n) \cdot Sp(1), \quad G_2, Spin(7).$$

Più esplicita evidenza al gruppo

$$Sp(n) \cdot Sp(1) = \frac{Sp(n) \times Sp(1)}{\pm(I,1)}$$

fu data qualche anno dopo da E. Martinelli nel suo studio della geometria riemanniana dello spazio proiettivo quaternionale $\mathbb{H}P^n$, con la conseguente proposta di considerare $Sp(n) \cdot Sp(1)$ come gruppo di struttura di una geometria quaternioanale "generalizzata" [23], [24]. In questi lavori viene riconosciuto il ruolo di una 4-forma "fondamentale" $\Omega = \omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2$, globalmente definita in termini delle 2-forme di Kähler delle strutture locali quasi complesse I, J, K.

Le strutture ora definite sono sintetizzate nelle seguenti due tavole.

TABLE 1. Strutture legate ad $\mathbb{H}$

M^{4n}	$GL(n,\mathbb{H})$ quasi ipercomplesse	$GL(n,\mathbb{H}) \cdot Sp(1)$ quasi quaternionali
M^{4n}	$Gl(n,\mathbb{H})$ with $T^{\nabla} = 0$ ipercomplesse	$Gl(n,\mathbb{H}) \cdot Sp(1)$ with $T^{\nabla} = 0$ quaternionali

TABLE 2. Strutture riemanniane legate ad $\mathbb{H}$

(M^{4n}, g)	$Sp(n)$ with $T^{\nabla} = 0$ iperhermitiane	$Sp(n) \cdot Sp(1)$ with $T^{\nabla} = 0$ quaternionali hermitiane
(M^{4n}, g)	with $Hol^g \subset Sp(n)$ iperkähleriale	with $Hol^g \subset Sp(n) \cdot Sp(1)$ quaternionali kähleriane

Poiche' $Sp(n) \subset SU(2n)$, ogni metrica iperkähleriana su una M^{4n} è Ricci-piatta. Più in generale, ogni metrica quaternionale kähleriana risulta essere di Einstein, e si presentano dunque tre diversi casi, secondo il segno della curvatura scalare s: $s > 0$, $s = 0$ (corrispondente a varietà *localmente iperkähleriane*), $s < 0$.

4. Varietà iperkähleriane

La teoria delle varietà iperkähleriane M^{4n} è oggi un campo di ricerca in rapido sviluppo, dove confluiscono idee e metodi di geometria algebrica e differenziale con motivazioni di teoria di gauge, come le equazioni di Nahm e spazi di moduli di monopoli. Tale teoria ha iniziato a svilupparsi dalla fine degli anni '70, venendosi allora a chiarire l'esistenza di svariati esempi significativi.

Si deve menzionare l'esistenza di una metrica iperkähleriana su ogni superficie $K3$, conseguenza del teorema di Calabi-Yau, essendo nulla la prima classe di Chern e per l' isomorfismo $Sp(1) \cong SU(2)$. Alcune proprietà di tali metriche su superfici $K3$ possano essere descritte in casi speciali, p. es. la descrizione delle isometrie iperkähleriane della superficie di Kummer, contenuta nel lavoro di D. Alekseevsky - M. Graev, 1990. Tuttavia non sono state scritte esplicite espressioni di tali metriche iperkähleriane, "and it seems likely that no such formulae exist; that is, that these metrics are transcendental objects that admit no exact algebraic description" ([17], p. 160).

Due serie di varietà compatte $K^{[n]}$ and K_n di dimensione reale $4n$, $n \geq 2$, sono state costruite partendo rispettivamente da superfici K3 e da tori T^4, e su esse esistono ampie famiglie di metriche iperkähleriane. Tali varietà sono state introdotte da A. Beauville nel 1982, generalizzando una precedente costruzione di $K^{[2]}$ dovuta a A. Fujiki. Tali esempi, con secondo numero di Betti rispettivamente $b_2 = 23$ e $b_2 = 7$, rimangono le sole serie note di varietà iperkähleriane compatte. La loro topologia è assai interessante, e scriviamo qui solo i polinomi di Poincare' per $n = 2$, calcolabili in base a formule di L. Göttsche:

$$P(K^{[2]}) = 1 + 23t^2 + 276t^4 + ...,$$

$$P(K_2) = 1 + 7t^2 + 8t^3 + 108t^4 + ...$$

Dalle formule dei polinomi di Poincare' per i successivi valori di n si ottiene:

Due nuovi esempi di varietà iperkähleriane compatte sono oggetto di costruzioni recentemente sviluppate da K. O' Grady (1999, 2000), con dimensione reale rispettivamente $4n = 20$ e $4n = 12$, e con secondo numero di Betti $b_2 \geq 24$ e $b_2 = 8$. Segnaliamo che l' esistenza di

TABLE 3. Caratteristica di Eulero delle varietà di Beauville $K^{[n]}$ e K_n

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$K^{[n]}$	324	3200	25650	176256	1073720	5930496	30178575
K_n	108	448	750	2592	2744	7680	9477

una metrica iperkähleriana su una varietà compatta M^{4n} impone forti restrizioni alla caratteristica di Eulero χ, alla segnatura τ e ai numeri di Betti, ottenute da S. Salamon [31]. P. es. (cfr. la precedente "Table 3"):

$$n\chi(M) \text{ è divisibile per } 24,$$

$$\chi(M), \tau(M), b_{2n}(M) \text{ sono pari salvo per } 4n \text{ divisibile per } 32.$$

Sul fronte non compatto, nel 1979 E. Calabi costrui' una metrica iperkähleriana su $T^*\mathbb{C}P^n$, il fibrato cotangente di spazi proiettivi complessi, estendendo una simile costruzione data nel precedente anno da Eguchi-Hanson per $n=1$. In quell'occasione Calabi propose il termine "hyperkähler", che ben descrive l'esistenza di una famiglia parametrizzata da una sfera S^2 di strutture complesse, tutte kähleriane rispetto alla metrica assegnata. Metriche iperkähleriane esistono più in generale sugli spazi totali dei fibrati cotangenti di classi più generali di varietà di Kähler: espliciti potenziali iperkähleriani sono stati scritti sul T^* di spazi simmetrici hermitiani (O. Biquard - P. Gauduchon, 1995). Il risultato più generale ottenuto in questa direzione è forse la costruzione, sviluppata indipendentemente da B. Feix e da D. Kaledin di una metrica iperkähleriana in un intorno aperto della sezione nulla sul fibrato cotangente di un'arbitraria varietà complessa kähleriana (cfr. il contributo di Kaledin in [29]).

La costruzione del quoziente per riduzione in geometria simplettica e kähleriana può essere estesa al contesto iperkähleriano ([16]; una presentazione della riduzione iperkähleriana è anche contenuta in [2], dove l'autore riferisce come il suo punto di vista sull'interesse della geometria iperkähleriana "was radically changed by the discovery of a very simple and beautiful quotient construction which generates vast numbers of hyperkähler manifolds in a natural way").

Descriveremo la riduzione iperkähleriana con qualche esempio, anche in relazione, nei prossimi paragrafi, ad altre geometrie legate ai quaternioni.

Tornando per un momento al contesto simplettico, ricordiamo che la motivazione fisico-matematica della riduzione è l'abbassamento della dimensione dello spazio delle fasi di un sistema dinamico in presenza di un gruppo di simmetrie. Un semplice esempio geometrico di riduzione simplettica è suggerita dalla duplice costruzione elementare dello spazio proiettivo complesso:

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - 0)/\mathbb{C}^*, \qquad \mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1,$$

dove la prima presentazione evidenzia la struttura complessa di $\mathbb{C}P^n$, e la seconda quella riemanniana. La sintesi dei due punti di vista è nella geometria simplettica: la funzione hamiltoniana (applicazione momento della riduzione)

$$\mu = \frac{1}{2}|z|^2 : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

ha per gradiente simplettico il campo hamiltoniano $X_\mu = \mathcal{I}\ d\mu$, dove $\mathcal{I} : T^*M \cong TM$, e X_μ è generatore dell flusso hamiltoniano dell'azione diagonale e simplettica di $U(1) \cong S^1$ su $\mathbb{C}^{n+1}$. Il quoziente

$$\boxed{\mathbb{C}P^n = \mu^{-1}(1)/U(1)}$$

eredita la struttura simplettica e kähleriana di $\mathbb{C}^{n+1}$, ed è ottenuto da esso per "riduzione". La proiezione $\mathbb{C}^{n+1} - 0 \xrightarrow{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}P^n$ è legata a $\mu^{-1}(1) = S^{2n+1} \xrightarrow{U(1)} \mathbb{C}P^n$ mediante la complessificazione $G^c = \mathbb{C}^*$ di $G = \mathbb{U}(1)$ e $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ è l' *insieme M^s dei punti stabili* dell'azione di $U(1)$ su $M = \mathbb{C}^{n+1}$.

Sia ora M^{4n} una varietà iperkähleriana, e sia G un gruppo di Lie di automorfismi iperkähleriani di M. Dalle tre strutture simplettiche $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ di M^{4n} otteniamo (con opportune ipotesi) tre applicazioni momento μ_I, μ_J, μ_K, compendiabili in un'unica:

$$\boxed{\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K) : M \to \mathsf{g}^* \oplus \mathsf{g}^* \oplus \mathsf{g}^*,}$$

definita usando funzioni hamiltoniane f_1, f_2, f_3 dei gruppi a un parametro di isometrie generati dagli elementi $X_1, X_2, X_3 \in \mathsf{g}$:

$$\boxed{\mu(p)\ (X_1, X_2, X_3) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p)).}$$

Teorema 4.1. [16] *Se $\lambda \in \mathsf{g}^* \oplus \mathsf{g}^* \oplus \mathsf{g}^*$ è un valore regolare di μ e se G agisce liberamente su $\mu^{-1}(\lambda)$ con quoziente di Hausdoff, il quoziente $\mu^{-1}(\lambda)/G$ è una varietà iperkähleriana.*

Il più semplice esempio si ottiene dall'azione diagonale e iperkähleriana di $U(1)$ su $M = \mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \oplus \mathbb{C}^{n+1}$. Con notazioni di numeri complessi: $\vec{u} = \vec{z} + j\vec{w}$ consideriamo dunque l'azione diagonale di $\tau = e^{it} \in U(1)$:

$$(\tau, \vec{u}) \in U(1) \times \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{H}^{n+1},$$

$$(\tau, (\vec{z}, \vec{w})) \to (\tau \vec{z}, \bar{\tau} \vec{w}).$$

Se $\vec{u} = (u_0, u_1, ..., u_n)$, l'applicazione momento iperkähleriana si scrive:

$$\mu(u_0, u_1, ..., u_n) = \sum_{\alpha=0}^{n} \bar{u}_\alpha i u_\alpha = i(|\vec{z}|^2 - |w|^2) + 2k\vec{z} \cdot \vec{w} \in \text{im } \mathbb{H},$$

e per ogni valore $\lambda \in \mathbb{H} - 0$ l'azione di $U(1)$ è libera su $\mu^{-1}(\lambda)$. Si vede allora che il quoziente non dipende dalla scelta di $\lambda \in \text{im } \mathbb{H}$, e scegliendo $\lambda = i$ le equazioni dell'applicazione momento, rispettivamente $\mu_I = 1$ e $\mu_J = \mu_K = 0$, sono: $|\vec{z}|^2 - |\vec{w}|^2 = 1$, e $\vec{z} \cdot \vec{w} = 0$. Nei punti di $\mu^{-1}(i)$ con la coordinata $\vec{w} = 0$ le orbite dell'azione di $U(1)$ forniscono il quoziente simplettico $\mathbb{C}P^n$. Per riconoscere il quoziente globale, è utile pensare il secondo fattore $\mathbb{C}^{n+1}$ di $\mathbb{H}^{n+1}$ come duale del primo. Dunque

$$\mathbb{H}^{n+1} = V \oplus V^*,$$

con $V \cong \mathbb{C}^{n+1}$, e scriviamo $\vec{u} = (\vec{z}, \omega)$. In tal modo le equazioni sopra scritte dell'applicazione momento per $\lambda = i$ diventano:

$$|\vec{z}|^2 - |\omega|^2 = 1, \quad \omega(\vec{z}) = 0.$$

Denotiamo con $N = \mu^{-1}(i)/U(1)$ il quoziente, che identificheremo con $T^*\mathbb{C}P^n$. Ricordiamo che $T^*\mathbb{C}P^n \cong \gamma \otimes (\gamma^\perp)^*$, essendo γ il fibrato in rette complesse tautologico di Hopf e $\gamma^\perp$ il suo complemento ortogonale nel fibrato banale di rango $n+1$ su $\mathbb{C}P^n$. Osserviamo quindi che le precedente equazioni $\omega(\vec{z}) = 0$ rappresentano il luogo $\mu_J = \mu_K = 0$ nell'insieme M^s dei punti stabili dell'azione complessificata di $\mathbb{C}^*$, e che M^s è il pullback di $\gamma \otimes (\gamma^\perp)^*$ su $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ mediante la proiezione su $\mathbb{C}P^n$. Ne segue che $\mu^{-1}(i)/U(1) = M^s/\mathbb{C}^* = T^*\mathbb{C}P^n$.

Un'altro esempio di quoziente si ha partendo ancora dallo spazio piatto: $M = \mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, ma con l'azione $G = \mathbb{R}$, $t(z_1, z_2, w_1, w_2) = (e^{it}z_1, e^{-it}z_2, w_1 + t, w_2)$, si ottiene la metrica iperkähleriana di Taub-NUT su $\mathbb{R}^4$, legata a una famiglia di metriche di Einstein autoduali con curvatura scalare negativa [6].

E' da segnalare anche un notevole teorema di P. Kronheimer (1990), raffinato da O. Biquard e A. Kovalev (1996), sull'esistenza di una metrica iperkähleriana (completa o incompleta) sulle orbite coaggiunte in gruppi di Lie complessi semisemplici. Alcune di tali orbite coaggiunte iperkähleriane sono state anche ottenute per riduzione da $\mathbb{H}^n$.

Infine, esempi notevoli di *varietà ipercomplesse non iperkähleriane* si hanno dal seguente risultato (P. Spindel e al., 1988; D. Joyce, 1992):

Teorema 4.2. *Se G è un gruppo di Lie compatto di rango r, il prodotto $G \times T^k$ ammette una struttura ipercomplessa per qualche $k \leq max(r, 3)$. Tale k puo' anche essere* 0.

5. Varietà quaternionali kähleriane positive

Ricordiamo che le varietà quaternionali kähleriane (nel seguito spesso abbreviate con la sigla "qK") costituiscono una classe di varietà di Einstein e appartengono pertanto, secondo il segno della curvatura scalare s, alle tre classi appresso definite:

$$\boxed{\begin{cases} s > 0, & \text{varietà qK positive (se complete)} \\ s = 0, & \text{varietà localmenteiperkähleriane} \\ s < 0, & \text{varietà qK negative} \end{cases}}$$

Le varietà con metrica localmenteiperkähleriana hanno olonomia ridotta $Sp(n)$, e il loro studio si riconduce dunque al loro rivestimento universale iperkähleriano. Tra le altre due classi, la teoria è sensibilmente più sviluppata per $s > 0$, anche grazie al legame con la geometria algebrica complessa, tramite la "spazio dei twistors" Z, definibile per la più ampia classe delle varietà quasi quaternionali (cfr. par. 3 e la "Table 1"). Z ha dimensione reale $4n + 2$, è dotato di una struttura quasi complessa naturale, integrabile se e solo se M è quaternionale, e le fibre di $Z \to M$ sono curve razionali [30], [4], [1].

La varietà complessa Z è di speciale interesse quando M è quaternionale kähleriana, e in tal caso una struttura più ricca può essere definita su Z. Se la curvatura scalare s della metrica quaternionale kähleriana su M è diversa da zero, allora Z ammette una struttura di contatto complessa, tale che il fibrato in rette $L = TZ/D$, quoziente del fibrato tangente modulo la distribuzione di contatto D ristretta alle fibre di $Z \to M$, è isomorfo a $\mathcal{O}(2)$.

Inoltre, per $s > 0$, una metrica di Kähler Einstein con curvatura scalare positiva è naturalmente definita su Z, in modo che $Z \to M$ sia una summersione riemanniana con fibre totalmente geodetiche. La 2-forma di Kähler su Z risulta proporzionale alla curvatura di una connessione naturale su L, e pertanto L risulta essere un fibrato in rette ampio [30]. Tutto ciò rende lo spazio dei twistors Z di una varietà quaternionale kähleriano positiva M una *varietà di Fano di contatto*, proprietà chiave per dimostrare il seguente:

Teorema 5.1. [22] *Per ogni n vi sono - a meno di omotetie - solo un numero finito di varietà quaternionali kähleriane positive M^{4n}.*

Questo teorema è solo una degli argomenti di supporto per la seguente:

Congettura di LeBrun-Salamon: Ogni varietà M^{4n} quaternionale kähleriana positiva è simmetrica.

Le varietà simmetriche quaternionali kähleriane positive sono state classificate da J. Wolf (1964), in corrispondenza con i gruppi semplici compatti:

$$Sp(n+1), SU(n+1), SO(n+1), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.$$

Per ogni tale gruppo di Lie G vi è uno "spazio di Wolf" quaternionale kähleriano positivo $G/K\cdot Sp(1)$, con spazio dei twistors $G/K\cdot U(1)$. Qui $K \subset G$ e G ha algebra di Lie $\mathsf{g} = \mathsf{k} + \mathsf{sp}(1) + \mathsf{m}$ con $[\mathsf{k} + \mathsf{sp}(1), \mathsf{m}] \subset \mathsf{m}$. Più esplicitamente, gli spazi di Wolf sono contenuti nella seguente tavola, in cui Gr denota la Grassmanniana e la Grassmanniana orientata, rispettivamente in spazi vettoriali complessi e reali.

Table 4. Spazi di Wolf

$\mathbb{H}P^n$,	$Gr_2(\mathbb{C}^{n+1})$,	$Gr_4(\mathbb{R}^{n+1})$,
$\frac{G_2}{SO(4)}$,	$\frac{F_4}{Sp(3)Sp(1)}$,	
$\frac{E_6}{SU(6)Sp(1)}$,	$\frac{E_7}{Spin(12)Sp(1)}$,	$\frac{E_8}{E_7Sp(1)}$,

Dimostrazioni della congettura di LeBrun - Salamon sono state date nelle seguenti ipotesi:

(a) se M^{4n} è omogenea (Alekseevsky, 1968);

(b) per $n = 1$ (Hitchin, 1987), $n = 2$ (Poon-Salamon, 1991), $n = 3$ (H. & R. Herrera, 2001);

(c) per $b_2 > 0$ o per $n \leq 4$ e $b_4 = 1$ (LeBrun-Salamon, 1994).

6. Legami tra strutture legate ad $\mathbb{H}$ e le riduzioni

La geometria iperkähleriana è legata a quella quaternionale kähleriana positiva da notevoli fibrazioni, descritte nella seguente "Table 5" (dove nella colonna a sinistra sono indicati i prototipi delle varie strutture). Queste fibrazioni su M^{4n} furono introdotte, dal basso verso l'alto della tavola, da L. Berard Bergery e S. Salamon (1980), da M. Konishi (1975), da A. Swann (1990).

TABLE 5. Fibrazioni tra strutture legate a $\mathbb{H}$

$\mathbb{H}^{n+1} - 0$	$C(\mathcal{S})^{4n+4}$	Cono iperkähleriano
$\downarrow$	$\downarrow_{\mathbb{R}^+}$	$\downarrow$
S^{4n+3}	$\mathcal{S}^{4n+3}$	fibrato 3-Sasakiano
$\downarrow$	$\downarrow_{\mathbb{S}^1}$	$\downarrow$
$\mathbb{C}P^{2n+1}$	Z^{4n+2}	twistors
$\downarrow$	$\downarrow_{\mathbb{S}^2}$	$\downarrow$
$\mathbb{H}P^n$	M^{4n}	quat. Kähler, $s > 0$

Sussistono teoremi (1987-1994) che consentono di riprodurre per riduzione le quattro geometrie su altri spazi (spesso singolari, almeno ai due livelli più bassi), non appena si abbia l'azione di un gruppo che conservi la struttura. Questi teoremi sono stati ottenuti tra la fine degli anni '80 e l'inizio degli anni '90. Uno di essi è il teorema 4.1, dovuto a a Hitchin-Karlhede-Lindström-Rocek per strutture iperkähleriane. Gli altri tre teoremi sono stati dimostrati da Boyer-Galicki-Mann per strutture 3-sasakiane, da Hitchin per strutture twistoriali, e da Galicki-Lawson per strutture quaternionali kähleriane (cfr. [10] per le formulazioni esplicite).

Guardiamo ora a riduzioni che si corrispondono nelle fibrazioni che legano le quattro strutture che abbiamo descritto (iperkähleriana, 3-Sasakiana, twistoriale, quaternionale kähleriana).

La più semplice azione di questo tipo è quella diagonale di $U(1)$ su $\mathbb{H}^{n+1}$ ed è stata gia esaminata nel par. 4: il quoziente di $\mu^{-1}(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$ fornisce la metrica di Calabi su $T^*\mathbb{C}P^n$. Guardando all'insieme $\mu^{-1}(0)$, l'azione è ancora libera, purchè ristretta a $\mathbb{H}^{n+1} - 0$. Cosi' facendo si hanno azioni corrispondenti a livello 3-Sasakiano e quaternionale kähleriano, e si ottengono i seguenti quozienti:

$$\begin{array}{ccc} S^{4n+3} & \stackrel{U(1)}{\Longrightarrow} & \frac{SU(n+1)}{S(U(n-1)\times U(1))} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}P^n & \stackrel{U(1)}{\Longrightarrow} & Gr_2(\mathbb{C}^{n+1}), \end{array}$$

Si ha dunque che il cono iperkähleriano sulla varietà 3-sasakiana in alto a destra può pensarsi come limite di $T^*\mathbb{C}P^n$ con la metrica di Calabi, quando λ tende a 0. Si noti inoltre che questi ultimi quozienti sono "deformabili" con l'introduzione di pesi $p_0, p_1, ..., p_n \in \mathbb{Z}$ nell'azione:

$$(u_0, u_1, ..., u_n) \to (e^{2\pi i p_0 t}u_0, e^{2\pi i p_1 t}u_1, ..., e^{2\pi i p_n t}u_n).$$

Tali deformazioni producono sempre singolarità a livello quaternionale kähleriano, mentre a livello 3-sasakiano e iperkähleriano con alcune condizioni aritmetiche sui pesi possono aversi quozienti lisci.

L'azione diagonale di $Sp(1)$ produce invece la seconda serie di spazi di Wolf:

$$\begin{array}{ccc} S^{4n+3} & \stackrel{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \frac{SO(n+1)}{SO(n-3)\times Sp(1))} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}P^n & \stackrel{Sp(1)}{\Longrightarrow} & Gr_4(\mathbb{R}^{n+1}). \end{array}$$

e dunque le due serie di spazi di Wolf *classici*:

$$Gr_2(\mathbb{C}^{n+1}), \qquad Gr_4(\mathbb{R}^{n+1}),$$

possono essere ottenuti come quozienti quaternionali kähleriani di $\mathbb{H}P^n$.

E' dunque naturale il seguente:

Problema. Si possono ottenere gli spazi di Wolf eccezionali:

$$\frac{G_2}{SO(4)}, \quad \frac{F_4}{Sp(3)Sp(1)},$$

$$\frac{E_6}{SU(6)Sp(1)}, \quad \frac{E_7}{Spin(12)Sp(1)}, \quad \frac{E_8}{E_7Sp(1)}$$

come quozienti quaternionali kähleriani di qualche $\mathbb{H}P^n$?

Per il primo spazio di Wolf eccezionale, $G_2/SO(4)$, di dimensione reale 8, una risposta (parzialmente) positiva è data dal seguente:

Teorema 6.1. [19] *Il sottogruppo diagonale*
$$U(1) \subset U(3) \subset SO(6) \subset SO(7)$$
agisce su $Gr_4(\mathbb{R}^7)$ *e il quoziente quaternionale kähleriano è un orbifold* $\mathbb{Z}_3\backslash G_2/SO(4)$.

Combinando con la riduzione $Sp(1)$ di $\mathbb{H}P^6$ si ottiene:

$$\begin{array}{ccccc} S^{27} & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \frac{SO(7)}{SO(3)\times Sp(1)} & \overset{U(1)}{\Longrightarrow} & \mathbb{Z}_3\backslash G_2/Sp(1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}P^6 & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & Gr_4(\mathbb{R}^7) & \overset{U(1)}{\Longrightarrow} & \mathbb{Z}_3\backslash G_2/SO(4). \end{array}$$

Il quoziente per $U(1) \times Sp(1)$ appena descritto può essere deformato con l'introduzione di pesi nell'azione del fattore $U(1)$, e opportune scelte dei pesi consentono di ottenere quozienti lisci di dimensione 11 a livello 3-sasakiano. Lo stesso fenomeno si presenta con una simile azione di $U(1) \times Sp(1)$ sulla fibrazione di Hopf $S^{31} \to \mathbb{H}P^7$, fornendo ora quozienti lisci in dimensione 15. Questi quozienti "eccezionali" in dimensione 11 e 15, costruiti in [5], sono i primi esempi di varietà 3-sasakiane che non siano ne' omogenee ne' toriche.

Gli esempi di varietà 3-sasakiane di dimensione 15 sopra descritti sono dunque ottenuti per deformazione di un azione che descriviamo ora anche a livello quaternionale kähleriano. Si ha infatti la seguente riduzione [26], nella quali usiamo il simbolo CAYLEY (introdotto in lavori sulle calibrazioni), per denotare lo spazio simmetrico dei 4-piani di $\mathbb{R}^8$ chiusi rispetto al doppio prodotto vettoriale.

Proposizione 6.1. *Il gruppo* $U(1)\times Sp(1)$ *agisce su* $\mathbb{H}P^7$ *e il quoziente quaternionale kähleriano è un orbifold* $\mathbb{Z}_2\backslash$ CAYLEY. *La varietà* CAYLEY *è* $\frac{Spin(7)}{(Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(1))/\mathbb{Z}_2} \cong Gr_4(\mathbb{R}^7)$.

Dunque il diagramma che descrive tale quoziente è:

$$\begin{array}{ccccc} S^{31} & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \frac{SO(7)}{SO(4)\times Sp(1)} & \overset{U(1)}{\Longrightarrow} & \mathbb{Z}_2\backslash\frac{Spin(7)}{Sp(1)\times Sp(1)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}P^7 & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & Gr_4(\mathbb{R}^8) & \overset{U(1)}{\Longrightarrow} & \mathbb{Z}_2\backslash\mathrm{CAYLEY}. \end{array}$$

Altre riduzioni, legate alla geometria degli ottetti di Cayley, sono attualmente allo studio [27]. In particolare azioni di $Sp(2)$ su spazi proiettivi quaternionali di opportuna dimensione sembrano produrre quozienti finiti delle varietà quaternionali kähleriane BICAYLEY = $\frac{Spin(9)}{(Sp(2)\times Sp(1)\times Sp(1))/\mathbb{Z}_2)} \cong Gr_4(\mathbb{R}^9)$ e TRICAYLEY, quest'ultimo lo spazio di Wolf eccezionale $\frac{F_4}{Sp(3)\cdot Sp(1)}$.

Le riduzioni sopra descritte sono ottenute considerando la realizzazione geometrica degli spazi di Wolf dei gruppi $Spin(7)$, $Spin(9)$, F_4 come Grassmanniane eccezionali in geometrie legate agli ottetti, e osservando che le varietà di Stiefel associate sono contenute nell'insieme degli zeri delle rispettive applicazioni momento a livello 3-sasakiano [26], [27]. Naturalmente, la strada per ottenere anche gli spazi di Wolf dei gruppi E_6, E_7, E_8 è lunga, e tale metodo potrebbe non essere appropriato.

7. Varietà quaternionali kähleriane negative

Un risultato indicativo della ricchezza di metriche in questo contesto è il seguente:

Teorema 7.1. [21] *Lo spazio dei moduli delle metriche complete quaternionali kähleriane negative su $\mathbb{R}^{4n}$ ha dimensione infinita.*

Gli spazi simmetrici semplicemente connessi con metrica quaternionale kähleriana negativa sono i seguenti:

Table 6. Spazi di Wolf negativi

$\mathbb{H}H^n = \frac{Sp(n,1)}{Sp(n)\times Sp(1)}$,	$\frac{SU(n-1,2)}{S(U(n-1)\times U(2))}$,	$\frac{SO_0(n-3,4)}{SO(n-3)\times SO(4)}$,
$\frac{G_2^2}{SO(4)}$,	$\frac{F_4^{-20}}{Sp(3)Sp(1)}$,	
$\frac{E_6^2}{SU(6)Sp(1)}$,	$\frac{E_7^{-5}}{Spin(12)Sp(1)}$,	$\frac{E_8^{-24}}{E_7Sp(1)}$,

e ognuno di essi, per un classico teorema di A. Borel, ammette quozienti discreti *compatti.*

Esempi omogenei completi sono gli spazi di Alekseevsky (1970 - 1975), la cui classificazione è stata completata da V. Cortes (1992). Sia N_p il numero definito dalle relazioni: $N_{8p+q} = 8^p N_q$, e $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $N_3 = N_4 = 4$, $N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 8$. Si hanno tre famiglie distinte di spazi di Alekseevsky:

$$W(p,q), \quad 0 \le p \le q, \qquad \dim = 4(4+p+q),$$

$$\begin{aligned} V(p,q),\ \ 1\leq p, 1\leq q, &\qquad \dim = 4(4+q+2pN_q),\\ T(p),\quad 0\leq p, &\qquad \dim = 4(p+3), \end{aligned}$$

dotati di metrica invariante quaternionale kähleriana negativa. Tali spazi sono semplicemente connessi, ma non-simmetrici, salvo che per alcuni valori di p e di q.

I duali non compatti delle Grassmanniane $Gr_2(\mathbb{C}^{n+1})$ e $Gr_4(\mathbb{R}^{n+1})$ possono ottenersi per riduzione di spazi iperbolici pseudoquaternionali kähleriani, nel modo seguente:

$$P(\mathbb{H}^{n,2}) = \frac{Sp(n,2)}{Sp(n,1)\times Sp(1)} \overset{U(1)}{\Longrightarrow} \frac{U(n,2)}{U(n)\times U(2)},$$

$$P(\mathbb{H}^{n,4}) = \frac{Sp(n,4)}{Sp(n,3)\times Sp(1)} \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} \frac{SO_0(n,4)}{SO(n)\times SO(4)}.$$

Similmente può descriversi una riduzione duale di quella descritta da Kobak e Swann:

$$P(\mathbb{H}^{3,4}) \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} \frac{SO_0(3,4)}{SO(3)\times SO(4)} \overset{U(1)}{\Longrightarrow} \mathbb{Z}_3\backslash G_2^2/SO(4),$$

e duali delle riduzioni che forniscono gli spazi di Wolf positivi dei gruppi $Spin(7)$, $Spin(9)$, F_4.

Altre riduzioni si ottengono da azioni di gruppi compatti o non compatti su spazi iperbolici quaternionali kähleriani $\mathbb{H}H^n$ [6], [7].

i) Un primo esempio è:

$$P(\mathbb{H}^{2,1}) = \mathbb{H}H^2 \overset{SO_0(1,1)}{\Longrightarrow} (\mathbb{R}^4, g_\lambda),$$

dove il gruppo $SO_0(1,1)\cong\mathbb{R}$ agisce sulle coordinate omogenee $\mathbf{u} = (u_0,u_1,u_2)$ di $\mathbb{H}H^2$ nel modo seguente:

$$\phi_t^\lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda t} & 0 & 0\\ 0 & \cosh t & \sinh t\\ 0 & \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0\\ u_1\\ u_2\end{pmatrix}.$$

La metrica ottenuta sul quoziente è, per $\lambda\neq 0$ la metrica di H. Pedersen su $\mathbb{R}^4$, autoduale di Einstein con $s<0$ e invariante per $U(2)$, e per $\lambda=0$ la metrica simmetrica iperbolica.

ii) Un altro esempio si ottiene dall'azione con pesi di $U(1)$ su $\mathbb{H}H^2$, con $t\in[0,1)$ e $\gcd(p_0,p_1,p_2)=1$:

$$\phi_t(u_0,u_1,u_2) = (e^{2\pi i p_0 t}u_0, e^{2\pi i p_1 t}u_1, e^{2\pi i p_2 t}u_2).$$

Sotto opportune condizioni sui pesi, il quoziente è liscio (M^4 varietà autoduale di Einstein con $s < 0$). P. es. se $\mathbf{p} = (p-1, p, p), p > 1$, il quoziente è il fibrato di dischi complessi unitari $\mathcal{L}_{2p} \to \mathbb{C}P^1$ con classe di Chern $2p$. Il fibrato $\mathcal{L}_{2p+1} \to \mathbb{C}P^1$ si ottiene similmente per $\mathbf{p} = (2p-1, 2p+1, 2p+1), p > 1$. In entrambi i casi si riottiene la metrica di LeBrun-Pedersen.

iii) La seguente riduzione fornisce metriche analoghe a quella di Pedersen in dimensione $4n - 4 > 4$:

$$P(\mathbb{H}^{n,1}) = \mathbb{H}H^n \overset{SO_0(1,1)}{\Longrightarrow} (\mathbb{R}^{4n-4}, g_{\mathbf{p}}).$$

L'azione è qui definita sulle coordinate omogenee nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{2\pi i D(\mathbf{p})}\mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix},$$

essendo $D(\mathbf{p}) = \mathrm{diag}(p_0, ..., p_{n-2})$ (con i pesi $p_\alpha \in \mathbb{R}$), ed essendo $B(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{smallmatrix}\right)$.

iv) Si consideri lo spazio di Wolf negativo

$$Gr_4^*(\mathbb{R}^{n+1}) = \frac{SO_0(n-3,4)}{SO(n-3) \times SO(4)},$$

duale non compatto di $Gr_4(\mathbb{R}^{n+1})$, come abbiamo visto ottenibile per riduzione $Sp(1)$ dallo spazio pseudoiperbolico quaternionale $P(\mathbb{H}^{n-3,4})$. Siano:

$$A(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right), \quad B(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{smallmatrix}\right),$$

e denotiamo con $\mathbf{u}_{01} = (u_0, u_1)$, $\mathbf{u}_{23} = (u_2, u_3)$,... le coppie di coordinate omogenee di $P(\mathbb{H}^{n-3,4})$.

In vari casi è interessante studiare azioni del seguente tipo (che qui scriviamo per $n - 3 = 2k$):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{0,n} \\ \mathbf{u}_{1,n-1} \\ \mathbf{u}_{2,3} \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{n-3,n-2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B(p_0t) & \mathbb{O} & \mathbb{O} & . & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B(p_1t) & \mathbb{O} & . & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & A(p_2t) & . & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & . & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & . & A(p_{k+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{0,n} \\ \mathbf{u}_{1,n-1} \\ \mathbf{u}_{2,3} \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{n-3,n-2} \end{pmatrix}.$$

v) Azioni di quest'ultimo tipo possono essere scritte usando tori o sottogruppi abeliani di $SO_0(n-3, 4)$. Sotto varie condizioni sui pesi, i quozienti risultano essere varietà lisce, quaternionali kähleriane negative. In particolare, per avere un quoziente di dimensione 4 dall'azione su $Gr_4^*(\mathbb{R}^{n+1})$ di un sottogruppo abeliano $G \subset SO_0(n-3, 4)$ deve essere $\dim G = n - 4$.

Poiche' i sottogruppi $G \subset SO_0(n-3,4)$ abeliani hanno dimensione limitata dalla condizione:

$$\dim G \leq \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{se } n-3 \text{ è pari} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n-3 \text{ è dispari,} \end{cases}$$

per $\dim G = n-4$ si ottiene:

$$n-3 \leq \begin{cases} 6 & \text{se } n-3 \text{ è pari} \\ 5 & \text{se } n-3 \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Dunque tra le varietà $Gr_4^*(\mathbb{R}^{n+1})$, solo quelle con $n-3 = 2,3,4,5,6$ possono ammettere delle M^4 per riduzione quaternionale kähleriana abeliana, e la dimensione del gruppo abeliano risulta essere rispettivamente $1,2,3,4,5$. Con le precedenti notazioni:

$$A(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right), \qquad B(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{smallmatrix}\right),$$

una possibile azione di $\mathbb{R}$ su $Gr_4^*(\mathbb{R}^6)$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{0,5} \\ \mathbf{u}_{1,4} \\ \mathbf{u}_{2,3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B(q_0 t) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B(q_1 t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & A(q_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{0,5} \\ \mathbf{u}_{1,4} \\ \mathbf{u}_{2,3} \end{pmatrix}.$$

Lo studio dell'azione di $\mathbb{R}(\mathbf{q})$ su $\mu_{\mathbf{q}}^{-1}(0) \subset Gr_4^*(\mathbb{R}^6)$ mostra che essa è libera se $(q_0, q_1) \neq (0,0)$. In questo caso il quoziente $M^4(q_0, q_1, q_2)$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^4$ con metrica autoduale di Einstein negativa con simmetria un toro T^2. La varietà $M^4(q_0, 0, 0)$ è isometrica allo spazio iperbolico $SO_0(4,1)/SO(4) \cong Sp(1,1)/Sp(1) \times Sp(1)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. V. Alekseevsky, S. Marchiafava, M. Pontecorvo, *Compatible complex structures on almost quaternionic manifolds*, Trans. Am. Math. Soc. **351** (1997), 997-1014.

[2] M. F. Atiyah, *Hyperkähler Manifolds*, Proc. Int. Symp. "Complex Geometry and Analysis" in honour of E. Vesentini, Ed. V. Villani, Springer (1990).

[3] J. Baez, *The Octonions*, Bull. Am. Math. Soc., 39 (2002), 145-205.

[4] A. Besse, "Einstein manifolds", Springer-Verlag (1987).

[5] C. P. Boyer, K. Galicki, P. Piccinni, *3-Sasakian Geometry, nilpotent orbits and exceptional quotients*, Ann. Gl. An. Geom., 21 (2002), 85-110.

[6] C. P. Boyer, D. Calderbank, K. Galicki, P. Piccinni, *Negative self-dual Einstein manifolds*, in preparazione.

[7] C. P. Boyer, K. Galicki, P. Piccinni, *Complete self-dual Einstein manifolds with few symmetries*, in preparazione.

[8] R. L. Bryant, *An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry*, in "Geometry and Quantum Field Theory" (D. S. Freed - K. K. Uhlenbeck, Ed.), IAS/Park City Math. series n. 1, AMS (1995), 5-181.

[9] E. Calabi, *Metriques kähleriennes et fibres holomorphes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 12 (1979), 269-294.

[10] "Essays on Einstein Manifolds" (C. LeBrun - Mc. Wang, Ed.), Surveys in Differential Geometry, vol. VI, Int. Press (2000).

[11] K. Galicki, H. B. Lawson Jr, *Quaternionic reduction and quaternionic orbifolds quotients*, Math. Ann., 282 (1988), 1-21.

[12] W. R. Hamilton, "Mathematical Papers", Electr. Library EMS, http://www.emis.de/classics/index.html

[13] W. R Hamilton, "Lectures on quaternions, containing a systematic statement of a New Mathematical Method of which the principles were communicated in 1843 to the Royal Irish Academy", Hodges and Smith, Dublin (1853).

[14] W. R Hamilton, "Elements of quaternions", Longmans and Green, London (1866).

[15] N. Hitchin, *Hyperkähler Manifolds*, Sem. Bourbaki 1991-92, Asterisque **206** (1992), 137-166.

[16] N. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), 535-589.

[17] D. D. Joyce, "Compact Manifolds with Special Holonomy", Oxford Univ. Press (2000).

[18] M. Kline, "Storia del Pensiero Matematico", 2 volumi, Einaudi (1991).

[19] P. Z. Kobak, A. Swann, *Quaternionic geometry of a nilpotent variety*, Math. Ann. **297** (1993), 747-763.

[20] P. Z. Kobak, A. Swann, *Exceptional hyperkähler reductions*, Twistor Newsl. **44** (1998), 23-26.

[21] C. R. LeBrun, *On complete quaternion Kähler manifolds*, Duke Math. J. **63** (1991), 723-743.

[22] C. R. LeBrun, S. M. Salamon, *Strong rigidity of positive quaternion Kähler manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 109-132.

[23] E. Martinelli, *Varieta' a struttura quaternionale generalizzata*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **26** (1959), 353-362.

[24] E. Martinelli, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, Ann. di Mat. 49 (1960), 73-90.

[25] L. Ornea, P. Piccinni, *On some moment maps and induced Hopf bundles in the quaternionic projective space.* Internat. J. Math. 11 (2000), no. 7, 925–942.

[26] L. Ornea, P. Piccinni, *Cayley 4-frames and a quaternion Kähler reduction related to $Spin(7)$*, Global Differential Geometry: the Mathematical Legacy of Alfred Gray

(Bilbao, 2000), 401–405, Contemp. Math., 288, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[27] L. Ornea, P. Piccinni, *Some quaternion Kähler reductions related to octonions*, in preparazione.

[28] "Proceedings Meeting on Quaternionic Structures in Mathematics and Physics", SISSA 1994 (G. Gentili - S. Marchiafava - M. Pontecorvo, Ed.), Electr. Library EMS, http://www.emis.de/proceedings/index.html

[29] "Proceedings Second Meeting on Quaternionic Structures in Mathematics and Physics", Roma, 1999 (S. Marchiafava - P. Piccinni - M. Pontecorvo, Ed.), World Sc. 2001, anche in Electr. Library EMS, http://www.emis.de/proceedings/index.html

[30] S. M. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67** (1982), 143-171.

[31] S. M. Salamon, *On the cohomology of Kähler and hyperkähler manifolds*, Topology **67** (1996), 137-155.

[32] S. M. Salamon, "Riemannian geometry and holonomy groups", Ed. Longman Scientific & Technical, UK (1989).

[33] A. Sudbery, *Quaternionic Analysis*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **85** (1979), 199-225.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Piazzale Aldo Moro 2, I-00185, Roma, Italy

E-mail address: piccinni@mat.uniroma1.it